Scriptum zur Vorlesung Computersysteme WS 2018/2019

geschrieben von Prof. Dr. Manfred Schimmler
überarbeitet und gehalten von Prof. Dr.-Ing. Reinhard Koch

Multimediale Informationsverarbeitung

Institut für Informatik

Technische Fakultät

Universität Kiel

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlendarstellung in Computern

Empfohlene Literatur: Klar, R.: Digitale Rechenautomaten, de Gruyter ISBN 3 11 0041944

1.1 Darstellung natürlicher Zahlen im B-adischen Zahlensystem

Im normalen Leben werden Zahlen in der Regel im Dezimalsystem dargestellt. Die natürliche Zahl 201 steht für die Summe

$$\mathbf{2}*10^2 + \mathbf{0}*10^1 + \mathbf{1}*10^0$$

Die Ziffern geben also die Koeffizienten eines Polynoms in 10 an, wobei jede Stelle für eine Potenz des Basiswerts 10 steht.

Das Dezimalsystem ist nicht besonders gut geeignet für elektronische Rechenanlagen, weil es technisch sehr schwierig ist, die zehn unterschiedlichen Ziffern in zehn Wertigkeiten einer physikalischen Größe zu codieren, so daß dieser Code

1. eindeutig ist (d.h. daß man immer weiß, welche Ziffer gemeint ist) und
2. nicht durch Störeinflüsse wie Übersprechen auf Leitungen verfälscht werden kann.

Daher bedient man sich in Computern in der Regel des dualen (binären) oder 2-adischen Zahlensystems. Hier werden die natürlichen Zahlen als Polynome in 2 betrachtet, wobei als Koeffizienten nur die Ziffern 0 und 1 erforderlich sind. Die Dezimalzahl 201 hat dann die Repräsentation 11001001, die zu verstehen ist als

$$\mathbf{1}*2^7 + \mathbf{1}*2^6 + \mathbf{0}*2^5 + \mathbf{0}*2^4 + \mathbf{1}*2^3 + \mathbf{0}*2^2 + \mathbf{0}*2^1 + \mathbf{1}*2^0.$$

Die Beschränkung auf zwei Ziffern erlaubt es, die Koeffizienten durch eine Größe zu repräsentieren, von der nur zwei Werte unterschieden werden müssen, z.B. eine Spannung, wobei 0V für die 0 und 3,3V für die 1 steht. Oder durch eine Lampe, bei der eine 1 durch Leuchten der Lampe und eine 0 durch Nicht-Leuchten codiert ist.

Nun gibt es aber nicht nur diese beiden Systeme zur Repräsentation von Zahlen. So wie wir bisher 10 und 2 als Basis des Zahlensystems verwendet haben, kann man jede positive ganze Zahl B≥2 als Basis eines sogenannten B-adischen Zahlensystems wählen. Eine beliebige Zahl n kann dann eindeutig repräsentiert werden als

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i B^i = b_0 B^0 + b_1 B^1 + \cdots + b_{N-1} B^{N-1}$$

Dabei sind die Ziffern $b_i \in \{0,1,2,...,B-1\}$. N ist die Anzahl der Stellen für die Darstellung. Da wir in Computern in der Regel ein festes „Wortformat“ zur Verfügung haben, ist damit für N eine obere Grenze gegeben. Wenn wir z.B. von einer „32-Bit-Architektur“ reden, bedeutet, das, dass die Zahlen mit 32 (binären, d.h. B = 2) Stellen dargestellt werden, also N = 32.

Mit B = 10 erhält man das Dezimalsystem, mit B = 2 das Binär- oder Dualsystem.

Zur Vereinfachung ist folgende Konvention in der Schreibweise üblich:

$$n = (\boldsymbol{b_{N-1}\, b_{N-2} ... b_1\, b_0})_B$$

wobei führende Ziffern weggelassen werden, wenn sie 0 sind und die Kennzeichnung durch das tiefgestellte B am Ende wegfällt, wenn man weiß, über welche Basis man redet.

Beispiele:

Wir hatten die Zahl $(201)_{10}$ bereits als $(11001001)_2$ kennengelernt. Mit der Basis 8 hat sie folgende Repräsentation:

$$\mathbf{0}*8^{N-1} + \ldots + \mathbf{0}*8^4 + \mathbf{0}*8^3 + \mathbf{3}*8^2 + \mathbf{1}*8^1 + \mathbf{1}*8^0 = (311)_8.$$

Das 8-adische Zahlensystem wird auch als Oktalsystem bezeichnet.

Wählen wir als Basis die 16, so begeben wir uns ins Hexadezimalsystem. Hier wird aus der Dezimalzahl 201

$$\mathbf{0}*16^{N-1} + \ldots + \mathbf{0}*16^3 + \mathbf{0}*16^2 + \mathbf{12}*16^1 + \mathbf{9}*16^0 = (C9)_{16}$$

Da wir für die Zahlen „zehn“, „elf“, „zwölf“, „dreizehn“, „vierzehn“ und „fünfzehn“ keine Ziffern zur Verfügung haben, behelfen wir uns mit den Großbuchstaben A bis F, wobei

A für 10

B für 11

C für 12

D für 13

E für 14

F für 15

steht. Die Zahl $(45054)_{10}$ beispielsweise hat die hexadezimale Repräsentation AFFE.

Merkmale eines B-adischen Zahlensystems:

- Es gibt B Ziffern 0, 1, ..., (B-1).
- Jede Stelle hat ein Gewicht einer Potenz von B.
- Das Gewicht der Stelle i ist das B-Fache des Gewichts der Stelle i-1.

Satz:

Die N-stellige B-adische Darstellung ermöglicht es, jede ganze Zahl aus $\{0,1,\ldots,B^N-1\}$ auf genau eine Weise darzustellen.

Beweis:

„Jede Zahl kann dargestellt werden“ wird bewiesen mit vollständiger Induktion nach N.

Induktionsanfang: Sei N=1. Die Zahlen 0, 1, ..., B-1 sind genau durch die B-adischen Ziffern als 1-stellige Zahlen darstellbar.

Sei die Aussage des Satzes richtig für N = k.

Dann können die Zahlen 0, 1, ..., B^k-1 dargestellt werden als k-stellige B-adische Zahlen. Die k+1-stelligen Zahlen, die mit einer 0 beginnen, decken also diesen Bereich ab. Die k+1-stellige Zahl mit einer Ziffer z am Anfang gefolgt von Nullen hat den Wert zB^k.

Sei m eine Zahl aus $\{0, 1, \ldots, B^{k+1}-1\}$. Sei $m = q * B^k + r$, mit ganzzahligen und positiven Werten q und r, wobei $r<B^k$ sein soll. Dann ist q darstellbar als die Ziffer q gefolgt von k Nullen und r ist nach Induktionsvoraussetzung darstellbar als eine k+1-stellige Zahl, die mit einer 0 beginnt. Das Ersetzen der ersten 0 von r durch q liefert die Darstellung von m.

Zu zeigen bleibt, daß die Darstellung eindeutig ist. Nun hat die Menge $\{0, 1, \ldots, B^N-1\}$ genau B^N Elemente. Andererseits stehen B^N N-stellige Zeichenreihen mit den Ziffern {0, 1, ..., B-1}

zur Verfügung. Da jede Zahl dargestellt werden kann ist also keine Zeichenreihe übrig, um eine Zahl doppelt darzustellen. Also ist die Darstellung eindeutig. □

Beispiele für B-adische Zahlen (B = 2, 3, 8, 10, 16):

Binär 2-adisch	**Ternär 3-adisch**	**Oktal 8-adisch**	**Dezimal 10-adisch**	**Hexadezimal 16-adisch**
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
10	2	2	2	2
11	10	3	3	3
100	11	4	4	4
101	12	5	5	5
110	20	6	6	6
111	21	7	7	7
1000	22	10	8	8
1001	100	11	9	9
1010	101	12	10	A
1011	102	13	11	B
1100	110	14	12	C
1101	111	15	13	D
1110	112	16	14	E
1111	120	17	15	F
10000	121	20	16	10

1.2 Rechnen im B-adischen Zahlensystem

In jedem B-adischen Zahlensystem können wir ähnlich wie im Dezimalsystem rechnen. Man muß aber dabei aufpassen daß man nicht (implizit) Ziffern benutzt, die in dem jeweiligen System nicht vorhanden sind.

Beispiele:

Im Oktalsystem sind die Zahlen 7351 und 642 zu addieren:

```
          7351
           642
Übertrag  11100
         10213
```

Im Dualsystem sollen 1101000101 und 10011010111 addiert werden.

```
           1101000101
          10011010111
Übertrag 111110001110
         100000011100
```

Im Hexadezimalsystem sollen CAD von 1234 subtrahiert werden:

```
  1 2 3 4      4 – D => Übertrag: 14 - D =  7 (Übertrag 1, Ziffer 7)
    CAD        3 – (A+1) = 3 - B => Übertrag: 13 - B = 8 (Übertrag 1, Ziffer 8)
Übertrag 1 1 1 0   2 - (C+1) = 2 - D => Übertrag 12 – D = 5 (Übertrag 1, Ziffer 5)
    5 8 7      1 – (0+1) = 0, Ende der Rechnung
```

Merke: Subtraktion ist schwieriger als Addition, immer zum nächsten Übertrag rechnen

Multiplikation der Zahl $21D5_{16}$ mit der Zahl 6_{16}:

```
  21 D5  *  6
  CAFE
```

Denn 6*5 = 1E (E schreib hin, 1 im Sinn), 6*D = 4E (+1 macht F, F schreib hin, 4 im Sinn), 6*1 = 6 (+4 macht A, A schreib hin, 0 im Sinn) und 6*2 = C.

Division der Zahl $6402_8 : 12_8$

Aufstellen einer Tabelle der Vielfachen des Divisors $12_8 = 10_{10}$ mit b=8 ist sehr nützlich:

i_8	$i*12_8$	Dezimal
1	12	10
2	24	20
3	36	30
4	50	40
5	62	50
6	74	60
7	106	70
10	120	80

Berechne durch schriftliche Division mit b=8: 6402:12=515

62	5*12=62
20	Rest 2, hole nächste Ziffer 0
12	1*12
62	Rest 6, hole nächste Ziffer 2
62	5*12=62
0	Rest 0, Ende der Division

Darstellung negativer Zahlen

Wir sind gewohnt, Zahlen durch Betrag und Vorzeichen anzugeben. In Rechenanlagen hat diese Technik zwei wesentliche Nachteile:

1. Die Subtraktion muss durch eine eigenständige Einheit ausgeführt werden.
2. Die Entscheidung, ob ein Ergebnis größer, gleich oder kleiner als 0 ist, ist für den Rechner schwierig.

Eine wesentlich elegantere Lösung ist die Darstellung von negativen Zahlen im Komplement. Bei der B-adischen Darstellung unterscheidet man das B-Komplement und das (B-1)-Komplement.

1.2.1 B-Komplement

Definition:

Sei n eine natürliche Zahl, dargestellt als ***N-stellige B-adische Zahl***. Das B-Komplement von n ist die Zahl B^N-n. Das B-Komplement von n wird interpretiert als -n.

Auf diese Weise werden bei ungradzahligem B alle Zahlen von 000...01 bis zzz...z, wobei z die Ziffer des Wertes (B-1)/2 ist zu positiven Zahlen und alle Zahlen von zzz...(z+1) bis fff...f, wobei f die Ziffer (B-1) ist zu negativen Zahlen. Die 0 ist dargestellt als 000...0.

Bei gradzahligem B sind 000...01 bis (B/2-1)FFF...F positiv und B/2 00...0 bis FFF...F negativ.

Beispiele:

Im Dezimalsystem mit Zahlen der Länge 5 können die Zahlen von -50000 bis +49999 unter Benutzung des 10-Komplements dargestellt werden:

Die Zahlen von 0 (00000) bis 49999 haben Ihre normale Interpretation, so wie wir sie gewöhnt sind. Die -1 wird jedoch dargestellt als 99999, die -2 als 99998, die -35971 als 64029 und die -50000 als 50000.

Wir betrachten die 8-stelligen Dualzahlen mit negativen Zahlen im 2-Komplement. Mit diesen können wir den Zahlenbereich von -128 bis +127 darstellen.

$$00000000 = (0)_{10}$$

$$01010101 = (85)_{10}$$

$$01111111 = (127)_{10}$$

$$10000000 = (-128)_{10}$$

$$11100110 = (-26)_{10}$$

$$11111111 = (-1)_{10}$$

Dezimal	4-stellige 2-Komplementzahlen
-8	1000
-7	1001
-6	1010
-5	1011
-4	1100
-3	1101
-2	1110
-1	1111
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Was ist der Vorteil vom B-Komplement?

Innerhalb unseres vorgegebenen Bereichs darstellbarer Zahlen können wir jetzt eine Subtraktion der Zahl Z_2 von der Zahl Z_1 einfach als Addition von Z_1 mit dem B-Komplement von Z_2 durchführen.

Beispiele:

Alle folgenden Additionen und Subtraktionen werden mit 8-stelligen Dualzahlen durchgeführt, wobei negative Zahlen im 2-Komplement dargestellt werden:

$103_{10} - 70_{10}$:

		01100111	$(103)_{10}$
	-	01000110	$-(70)_{10}$
=		01100111	$(103)_{10}$
	+	10111010	$+(-70)_{10}$
		1|00100001	$(33)_{10}$

15_{10} - 70_{10} :

		00001111	$(15)_{10}$
	-	01000110	$-(70)_{10}$
=		00001111	$(15)_{10}$
	+	10111010	$+(-70)_{10}$
		0|11001001	$(-55)_{10}$

-15_{10} - (-70_{10}) :

		11110001	$(-15)_{10}$
	-	10111010	$-(-70)_{10}$
=		11110001	$(-15)_{10}$
	+	01000110	$+(+70)_{10}$
		1|00110111	$(+55)_{10}$

Wie konvertiere ich eine Zahl in ihr B-Komplement?

Alle Ziffern z werden in (B-1-z) umgewandelt und dann wird auf die ganze Zahl 1 addiert.

Begründung:

$$-(b_{N-1}*B^{N-1} + b_{N-2}*B^{N-2} + b_{N-3}*B^{N-3} + ... + b_1*B^1 + b_0*B^0)$$

$$= B^N - (b_{N-1}*B^{N-1} + b_{N-2}*B^{N-2} + b_{N-3}*B^{N-3} + ... + b_1*B^1 + b_0*B^0)$$

$$= B^N - B^{N-1} - b_{N-1}*B^{N-1} + B^{N-1} - B^{N-2} - b_{N-2}*B^{N-2} + B^{N-2} - B^{N-3} - b_{N-3}*B^{N-3} + B^{N-3} - ... - B^1 - b_1*B^1 + B^1 - 1 - b_0*B^0 + 1$$

$$= (B - 1 - b_{N-1})*B^{N-1} + (B - 1 - b_{N-2})*B^{N-2} + (B - 1 - b_{N-3})*B^{N-3} + ... + (B - 1 - b_1)*B^1 + (B^1 - 1 - b_0)*B^0 + 1$$

Dies ist gerade die Darstellung der B-Komplement-Zahl in der oben angegebenen Form: jede Ziffer $\mathbf{b_i}$ ist durch (B -1 - $\mathbf{b_i}$) ersetzt worden und am Schluss wird zu allem 1 addiert.

Beispiele:

$-(107)_{10}$ als zweistellige Hexadezimalzahl:

$$(+107)_{10} = (6B)_{16}$$

$$(-107)_{10} = (94)_{16} + (1)_{16} = (95)_{16}$$

-107_{10} als Achtstellige Dualzahl:

$$(+107)_{10} = (01101011)_2$$

$$(-107)_{10} = (10010100)_2 + (1)_2 = (10010101)_2$$

Vorteile des B-Komplements:

- Addition und Subtraktion können mit derselben Hardware gemacht werden.
- Konversion ist einfach.
- Positive und negative Zahlen können gleich behandelt werden.
- Das Vorzeichen ist bei geradem B an der ersten Stelle (most significant digit) zu erkennen.

Nachteil: Überläufe werden nicht automatisch erkannt. Konvertierung erfordert ein „carry“

Beispiel:

$(11)_{10} + (10)_{10}$ im System der fünfstelligen Dualzahlen:

$$\begin{array}{ll} & 01011 \\ + & \underline{01010} \\ = & 0|10101 \end{array}$$

Das Ergebnis wird interpretiert als -11_{10}. Das ist ja falsch.

Allerdings kann man solche Überläufe erkennen, wenn man eine weitere (führende) Stelle vor der signifikantesten Stelle des Ergebnisses einführt.

1. Fall: Wenn eine positive und eine negative Zahl addiert werden, kann nie ein Übertrag auftreten.
2. Wenn zwei positive oder zwei negative Zahlen addiert werden, und die zusätzliche führende Stelle nach der Addition (Subtraktion) mit der signifikantesten Stelle übereinstimmt, ist kein Überlauf aufgetreten. Unterscheiden sie sich, ist ein Überlauf aufgetreten. Und zwar wenn die Stellen 01 sind, eine nicht darstellbare positive Zahl und wenn sie 10 sind ein betragsmäßig zu großes negatives Ergebnis.

Beispiele:

Das Beispiel von eben: $(11)_{10} + (10)_{10}$ im System der fünfstelligen Dualzahlen:

Sicherungsstelle ↓ (Kopie der signifikantesten Ziffer)

$$\begin{array}{ll} & 001011 \\ + & \underline{001010} \\ = & 0|10101 \end{array}$$

Sicherungsstelle der Summe = 0, MSB (most signifikant Bit) der Summe = 1, also Überlauf: nicht darstellbare positive Zahl als Ergebnis.

$10_{10} - 11_{10}$ im System der fünfstelligen Dualzahlen:

Sicherungsstelle ↓ (Kopie der signifikantesten Ziffer)

001010

\+ 110101

= 1|11111

Sicherungsstelle der Summe = 1, MSB (most signifikant Bit) der Summe = 1, also kein Überlauf und kein Unterlauf: darstellbare (negative) Zahl als Ergebnis (-1).

Satz:

Genau dann ist bei Addition zweier N-stelliger 2-adischer Zahlen das Ergebnis wieder im (mit N Ziffern) darstellbaren Bereich, wenn nach der Addition die Vorzeichenstelle (Stelle N-1) mit der Sicherungsstelle (Stelle N) übereinstimmt.

Beweis:

Zu unterscheiden sind folgende 6 Fälle:

1. $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1+n_2 \geq 2^{N-1}$
2. $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1+n_2 < 2^{N-1}$
3. $n_1 < 0$, $n_2 \geq 0$
4. $n_1 \geq 0$, $n_2 < 0$
5. $n_1 < 0$, $n_2 < 0$, $n_1+n_2 \geq -2^{N-1}$
6. $n_1 < 0$, $n_2 < 0$, $n_1+n_2 < -2^{N-1}$

Im Fall 1. beginnen beide Zahlen mit einer 0; das MSB sowie die Sicherungsstelle sind also 0. Da $n_1+n_2 \geq 2^{N-1}$ ist, entsteht bei der Addition an der Stelle N eine 1 als Übertrag:

00XXX.....XXX n_1

00XXX.....XXX n_2

01XXX.....XXX

↑ Stelle N

Also ist die Sicherungsstelle der Summe = 0, die Stelle N = 1, d.h. ein Überlauf ist aufgetreten.

Betrachten wir noch den Fall 3. Hier ist $n_1 < 0$, $n_2 \geq 0$, also

11XXX.....XXX n_1

00XXX.....XXX n_2

XXX.....XXX

↑ Stelle N

An der Stelle N kann ein Übertrag auftreten oder nicht. Im erste Fall sind die beiden ersten Stellen der Summe = 0, im zweiten sind sie beide = 1. Die Stelle vor der Sicherungsstelle wird

nicht betrachtet. In beiden Fällen sind die beiden höchsten Stellen gleich, d.h. es ist kein Überlauf und kein Unterlauf aufgetreten.

Der Leser möge sich selbst die anderen vier Fälle überlegen.

1.3 Konvertierung natürlicher Zahlen aus dem B-adischen Zahlensystemen ins B'-adische Zahlensystem mit unterschiedlichen Basen B und B'

Eine im B-adischen Zahlensystem dargestellte Zahl

$$n = \boldsymbol{b_N\, b_{N-1}\, b_{N-2} \ldots b_1\, b_0} = \boldsymbol{b_N} * B^N + \boldsymbol{b_{N-1}} * B^{N-1} + \ldots + \boldsymbol{b_1} * B^1 + \boldsymbol{b_0} * B^0$$

kann mit dem Hornerschema auch in folgender Weise geschrieben werden.

$$n = ((\ldots((\boldsymbol{b_N} * B + \boldsymbol{b_{N-1}}) * B + \boldsymbol{b_{N-2}}) * B + \ldots) * B + \boldsymbol{b_1}) * B + \boldsymbol{b_0}.$$

Ebenso hat n eine gleichartige Repräsentation im System mit der Basis B':

$$n = ((\ldots((\boldsymbol{b_N'} * B' + \boldsymbol{b_{N-1}'}) * B' + \boldsymbol{b_{N-2}'}) * B' + \ldots) * B' + \boldsymbol{b_1'}) * B' + \boldsymbol{b_0'}.$$

Um nun die b_i' aus der ersten Repräsentation zu berechnen, können wir durch wiederholte Division durch B' die Reste ermitteln, die dann genau den Ziffern im B'-adischen System entsprechen. Diese Division muß im B-adischen System durchgeführt werden, da wir ja anfangs nur die B-adische Darstellung von n kennen. Daher brauchen wir die B-adische Darstellung von B' für die Division.

Das Divisionsschema sieht dann so aus:

n	:	B'	=	q_0	Rest	$\boldsymbol{b_0'}$
q_0	:	B'	=	q_1	Rest	$\boldsymbol{b_1'}$
q_1	:	B'	=	q_2	Rest	$\boldsymbol{b_2'}$
		.	.	.		
q_{N-1}	:	B'	=	q_N	Rest	$\boldsymbol{b_N'}$

Und das Ergebnis wird durch die Folge der Reste $\boldsymbol{b_N'\ b_{N-1}'\ b_{N-2}\ \ldots\ b_0'}$ geliefert.

Beispiele:

Die Zahl 556_7 soll ins 3-adische System (Ternärsystem) umgewandelt werden.

$556_7 : 3_7 = 164_7$ Rest 1
3
25
24
16
15
1

$164_7 : 3_7 = 43_7$ Rest 2
15
14
12
2

$43_7 : 3_7 = 13_7$ Rest 1
3
13
12

1

13_7 : 3_7 = 3_7 Rest 1
$\underline{12}$
1

3_7 : 3_7 = 1_7 Rest 0
$\underline{3}$
0

1_7 : 3_7 = 0_7 Rest 1

Ergebnis $556_7 = 101121_3$

Die Zahl 556_7 soll ins Oktalsystem umgewandelt werden.

556_7 : 11_7 = 50_7 Rest 6
$\underline{55}$
06
$\underline{00}$
6

50_7 : 11_7 = 4_7 Rest 3
$\underline{44}$
3

4_7 : 11_7 = 0_7 Rest 4

Ergebnis $556_7 = 436_8$

Eine zweite Möglichkeit der Konvertierung ist die Abarbeitung des Hornerschemas

$$n = ((...((\mathbf{b}_N*B + \mathbf{b}_{N-1})*B + \mathbf{b}_{N-2})*B + ...)*B + \mathbf{b}_1)*B + \mathbf{b}_0$$

von links nach rechts. In diesem Falle müssen alle $\mathbf{b}_N$ sowie die Basis B in der Formel zunächst ins B'-System umgewandelt werden. Sodann kann die Formel wie üblich nach den Rechenregeln für + und * im B'-adischen System von links nach rechts ausgerechnet werden.

Beispiele:

Umwandlung der Zahl 110010101_2 ins Dezimalsystem:

n = (((((((1*2+1)*2+0)*2+0)*2+1)*2+0)*2+1)*2+0)*2+1 = 405

Umwandlung von 365_{10} ins Oktalsystem:

n = (3*12+6)*12+5 = (36+6)*12+5 = 44*12+5 = 550+5 = 555

Man beachte: die 10 ist im Oktalsystem als 12 dargestellt.

Bemerkung:

Die Konvertierung durch sukzessive Division empfiehlt sich, wenn die Arithmetik in dem Ausgangssystem einfacher ist und die Konvertierung durch Multiplikation und Addition ist einfacher, wenn die Arithmetik im Zielsystem besser beherrscht wird.

1.4 Brüche in Festkommadarstellung

Bisher haben wir uns nur mit ganzen Zahlen beschäftigt. Aber alle Ergebnisse, insbesondere die über die B-adische Zahlendarstellung und über die Komplementbildung können auch auf gebrochene Zahlen angewendet werden. Wir ergänzen dafür die Definition der B-adischen Darstellung in folgender Weise:

$$n = \sum_{i=M}^{N-1} b_i B^i$$

Zahlendarstellungen dieser Art nennt man Festkommadarstellungen, weil fest steht, dassdas Komma nach der N-ten Ziffer kommt. Für die Addition und Subtraktion bleibt alles bisher Gelernte gültig.

Bei der Multiplikation von ganzen Zahlen gilt: Das Produkt zweier N-stelligen ergibt eine 2N-stellige Zahl. Da die Größe der darstellbaren Zahlen in Computern in der Regel vorgegeben ist (typisch 16, 32 oder 64 Stellen) wählen wir als Ergebnis nur wieder die niederwertigsten N Stellen. Wenn eine der höherwertigen Stellen eine Ziffer ≠ 0 enthält, ist ein Überlauf aufgetreten, der über einen gesonderten Mechanismus abzufangen ist.

Für Festkommazahlen wählt man als Bezugspunkt die Stelle, an der das Komma steht. Man wählt also vom doppeltlangen Ergebnis wiederum N Stellen vor und M Stellen nach dem Komma. Alle anderen Stellen werden verworfen. Das kann genauso zu Überläufen führen wie bei der ganzzahligen Multiplikation. Zusätzlich können aber auch Nachkommastellen ausgelöscht werden, die zu weit „hinter“ dem Komma stehen, wodurch ein Teil der Genauigkeit verloren gehen kann.

1.4.1.1 Konversion von Festkommazahlen

Die Konversion von Festkommazahlen in einem B-adischen System in ein B’-adisches System kann wieder durch Auflösen des Horner-Schemas geschehen.

$$n = (b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-M})_B = ((\ldots(b_{-M}*B^{-1}+b_{-M+1})*B^{-1}+b_{-M+2})*B^{-1}+\ldots)*B^{-1}+b_{-1})*B^{-1}$$

Wir betrachten jetzt nur den gebrochenen Teil, denn wir wissen bereits wie wir den ganzzahligen Teil konvertieren können. Wenn man im B-adischen System leichter rechnen kann als im B’-adischen, empfiehlt sich folgendes Verfahren, das man „Wiederholte Multiplikation mit abschneiden“ nennt:

Man multipliziert die zu konvertierende Zahl mit der Basis B’. Die Stelle, die dabei vor das Komma gerät, ist die erste Ziffer der B’-adischen Darstellung. Diese subtrahiert man vom Ergebnis und bekommt wieder einen B-adischen Bruch mit einer 0 vor dem Komma. Mit diesem verfährt man genauso, usw.

Beispiel:

0,75625 soll ins Binärsystem gewandelt werden:

0,75625 * 2 = 1,5125	⇒	erste Ziffer ist 1. Diese abziehen ergibt 0,5125
0,51250 * 2 = 1,025	⇒	nächste Ziffer ist 1. Diese abziehen ergibt 0,025
0,02500 * 2 = 0,05	⇒	nächste Ziffer ist 0. Diese abziehen ergibt 0,05
0,05 * 2 = 0,1	⇒	nächste Ziffer ist 0. Diese abziehen ergibt 0,1
0,1 * 2 = 0,2	⇒	nächste Ziffer ist 0. Diese abziehen ergibt 0,2

0,2 * 2 = 0,4 ⇒ nächste Ziffer ist 0. Diese abziehen ergibt 0,4

0,4 * 2 = 0,8 ⇒ nächste Ziffer ist 0. Diese abziehen ergibt 0,8

0,8 * 2 = 1,6 ⇒ nächste Ziffer ist 1. Diese abziehen ergibt 0,6

0,6 * 2 = 1,2 ⇒ nächste Ziffer ist 1. Diese abziehen ergibt 0,2

0,2 * 2 = 0,4 ⇒ nächste Ziffer ist 0 usw.

Die Binärdarstellung lautet also 0,11000001100110011….

Die zweite Möglichkeit besteht in der rechnerischen Auflösung des Horner-Schemas. Diese empfiehlt sich, wenn man im Zielsystem rechnen möchte. In diesem Falle konvertiert man die Basis B sowie alle Ziffern in der Quelldarstellung zunächst ins B'-adische System und rechnet dann die oben angegebene Form der Zahl durch die angegebenen Additionen und Multiplikationen im B'-adischen System aus.

Beispiele:

1. Die Hexadezimalzahl 0,3D5 soll ins Dezimalsystem gewandelt werden:

$$((5*16^{-1}+13)*16^{-1}+3)*16^{-1} = 0{,}239501953125$$

2. Die Dezimalzahl 100,92 soll ins Binärsystem gewandelt werden:

   100,92 (mit 7 Stellen vor und 5 Stellen nach dem Komma):

   a) 100:2=50 Rest 0
      50:2=25 Rest 0
      25:2=12 Rest 1
      12:2=6 Rest 0
      6:2=3 Rest 0
      3:2=1 Rest 1
      1:2=0 Rest 1
      100=1100100

   b) 0,92:
      0,92*2 = 1,84
      0,84*2 = 1,68
      0,68*2 = 1,36
      0,36*2 = 0,72
      0,72*2 = 1,44
      0,44*2 = 0,88 (nur erforderlich für die Rundung)
      0,92=0,11101+0=0,11101
      100,92=1100100,11101

Wenn B eine Potenz von B' ist, ist es einfach, zwischen B-adisch und B'-adisch zu konvertieren. Sei z.B. B = 16 und B' = 2. Da $16 = 2^4$ ist, bestehen alle Ziffern im B'-adischen System aus vier B'-adischen Ziffern, z.B. 4 = 0100 oder C = 1100. Auf diese Weise kann man

einfach Ziffernweise konvertieren, wobei man im B'-adischen System immer Viererblöcke aus Ziffern zusammenfassen muss.

Übung: Wie kann man einfach vom Oktalsystem ins Hexadezimalsystem konvertieren?

1.5 Gleitkommadarstellung

Im technischen und wissenschaftlichen Bereich bedient man sich neben der Festkommadarstellung von Brüchen auch der Exponentenschreibweise.

Beispiel

$$3456{,}5 = 0{,}34565*10^4 = 0{,}34565E+4$$

Der Vorteil ist, dass man auf kurze und übersichtliche Weise einen sehr großen Zahlenbereich darstellen kann. Diese Darstellungsweise hat auch enorme Vorteile für die Zahlendarstellung in Computern: Hier ist man durch die Hardware auf eine oder wenige Wortgrößen (Anzahl von Bits) festgelegt, in denen ein Operand untergebracht werden muss. Würde nun nur die normale Dualdarstellung verwendet, könnte man bereits die Zahl 10 Milliarden in einem 32-Bit Wort nicht mehr darstellen. Wenn man andererseits auch gebrochene Zahlen in Festkommadarstellung zulassen möchte und jeweils 16 Bit vor und 16 Bit nach dem Komma verwendet, scheitert man bereits an der Zahl 100000. Der Bereich darstellbarer Zahlen ist in diesem Falle $[-2^{15} .. +2^{15}-2^{-16}]$.

In Computern werden binäre Gleitkommaformate verwendet. In einem Register werden drei Teile einer Zahl nacheinander in einer festen Anzahl von Bits gespeichert: Das Vorzeichen V der Zahl, die Mantisse und der Exponent.

V	Exponent	Mantisse

Der Wert der Gleitkommazahl ist im einfachsten Falle

$$n = Vorzeichen * 0,Mantisse * 2^{Exponent}$$

wobei das Vorzeichen +1 ist, wenn V=0 ist und -1, wenn V=1 ist. Dabei wird die Mantisse als positive Dualzahl und der Exponent als Dualzahl in Zweierkomplementdarstellung interpretiert.

Beispiel:

Wir definieren ein fiktives binäres Gleitkommaformat mit 16 Bit: 1 Bit Vorzeichen, 10 Bit Mantisse und 5 Bit Exponent. Die Zahl

1000110110000000 bedeutet $-0{,}011_2*10_2^{11_2} = -0{,}375_{10}*2_{10}^3 = -3$

0111111110000000 bedeutet $+0{,}111_2*10_2^{-1} = +0{,}875_{10}*2_{10}^{-1}=+0{,}4375$

0000011000000000 bedeutet $+0{,}1_2*10_2^1 = 1$

0000000000000000 bedeutet 0

Der darstellbare Zahlenbereich für dieses Format ist bereits

$$-2^{2^4-1}+2^5...+2^{2^4-1}-2^5 \approx -2^{15}...+2^{15}$$

was mit einem Festkommaformat von 16 Bit nur dann erreicht werden kann, wenn man keine Nachkommastellen zulässt.

1.5.1 Arithmetik mit Gleitkommazahlen

Die Multiplikation von Gleitkommazahlen ist einfach, denn

$$m_1 * 2^{e_1} * m_2 * 2^{e_2} = m_1 * m_2 * 2^{e_1+e_2}$$

d. h. die Mantissen können als normale Dualzahlen multipliziert werden und die Exponenten addiert. Das gleiche gilt für die Division. Schwieriger ist dagegen die Addition: Hier muss zunächst dafür gesorgt werden, dass die Exponenten angeglichen werden, denn eine Addition der Mantissen kann nur dann richtig ausgeführt werden, wenn die Exponenten gleich sind:

$$m_1*2^{e_1}+m_2*2^{e_1}=(m_1+m_2)*2^{e_1}$$

Zu diesem Zweck muss zunächst ermittelt werden, welcher Exponent der größere ist und die Exponentendifferenz d wird mittels einer Subtraktion gebildet. Sodann wird die Mantisse der Zahl mit dem kleineren Exponenten um d Stellen nach rechts verschoben, wobei von links Nullen nachgezogen werden. Dies entspricht einer Division der Mantisse durch 2^d bei gleichzeitiger Vergrößerung des Exponenten um d. Nun kann die Addition auf den angepassten Mantissen durchgeführt werden, wobei als Exponent des Ergebnisses der größere Exponent der Operanden wird. Durch die Addition kann es passieren, dass im Ergebnis eine Folge von führenden Nullen entsteht. Um aber für nachfolgende Operationen die Genauigkeit nicht einzuschränken, wird die Mantisse des Ergebnisses nun wieder nach links verschoben, bis die erste signifikante Stelle eine 1 ist. Wenn die Verschiebedistanz d' ist, muss schließlich der Exponent noch um d' vermindert werden, damit der Wert des Ergebnisses nicht verändert wird.

Beispiele:

1. In unserem obigen Gleitkommaformat wollen wir 4*0,2 rechnen:

   0000111000000000 * 0111101100110011

   Mantissenmultiplikation: 0,1*0,1100110011=0,01100110011

   Exponentenaddition: 00011+11110=100001, wird interpretiert als 00001

   Normalisierung macht daraus 0,1100110011 * 2^0.

   Ergebnis: 0000001100110011 (= 0,799804...)

2. Was ist 1+0,1?

   0000011000000000 + 0111011100110011

   Die Exponentendifferenz ist 00001 - 11101 = 00100 $(4)_{10}$

   Die Mantisse mit dem größeren Exponenten ist 1000000000

   Die andere Mantisse um 4 Stellen verschoben ist 0000110011

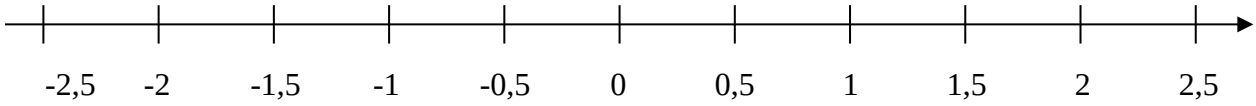
   Die Mantissensumme ist 1000110011

   und wir bekommen als Ergebnis 0000011000110011 (=1,099609...)

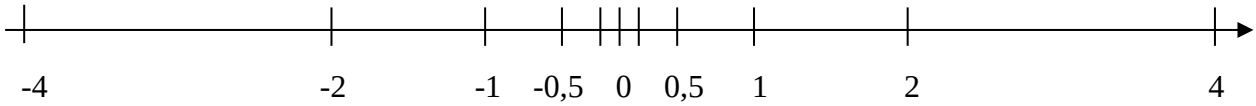
Bemerkungen:

Mit Gleitkommazahlen kann man einen größeren Zahlenbereich abdecken als mit Festkommazahlen mit gleich vielen Stellen. Während beim Festkommaformat zwischen je zwei benachbarten Zahlen der gleiche Abstand liegt, variiert dieser bei Gleitkommazahlen. In der Gegend der Null liegen sie sehr dicht, während sie zu den Grenzen des darstellbaren Zahlenbereichs hin immer weiter auseinanderliegen:

Festkommazahlen:



Gleitkommazahlen:



Multiplikation von Gleitkommazahlen ist aufwendiger als von Festkommazahlen, Addition von Gleitkommazahlen ist viel aufwendiger als bei Festkommazahlen.

1.5.2 Gebräuchliche Gleitkommaformate

Die IEEE hat für Rechenanlagen drei Gleitkommaformate spezifiziert, die wir in den gängigen Programmiersprachen wiederfinden:

32 Bit (float, single):

1 Vorzeichenbit

8 Exponentenbits (MSB first)

23 Mantissenbits (MSB first)

Der Wert w einer in diesem Format dargestellten Zahl berechnet sich als:

$w=(-1)^V*(1,M)*2^{E-127}$, falls E>0 und E<255

$w=(-1)^V*(0,M)*2^{-126}$, falls E=0 und M≠0

$w=(-1)^V*0$, falls E=0 und M=0

$w=(-1)^v$*Infinity (∞), falls E=255 und M=0

w=NaN (not a number), falls E=255 und M≠0

Darstellbarer Bereich ca. $[-10^{38}...10^{38}]$

64 Bit (double):

1 Vorzeichenbit

11 Exponentenbits (MSB first)

52 Mantissenbits (MSB first)

Der Wert w einer in diesem Format dargestellten Zahl berechnet sich als:

$w=(-1)^V*(1,M)*2^{E-1023}$, falls E>0 und E<2047

$w=(-1)^V*(0,M)*2^{-1022}$, falls E=0 und M≠0

$w=(-1)^V*0$, falls E=0 und M=0

$w=(-1)^V*$Infinity (∞), falls E=2047 und M=0

w=NaN (not a number), falls E=2047 und M≠0

Darstellbarer Bereich ca. $[-10^{300}...10^{300}]$

80 Bit (extended):

1 Vorzeichenbit

15 Exponentenbits (MSB first)

64 Mantissenbits (MSB first)

Der Wert w einer in diesem Format dargestellten Zahl berechnet sich als:

$w=(-1)^V*(0,M)*2^{E-16383}$, falls E>0 und E<32767

$w=(-1)^v*$Infinity (∞), falls E=32767 und M=0

w=NaN (not a number), falls E=32767 und M≠0

Darstellbarer Bereich ca. $[-10^{5000}...10^{5000}]$

Dabei ist zu beachten:

Die Zahlen sind in normalisierter Form, d.h. vor dem Komma steht eine 1. Diese führende 1 wird nicht mit dargestellt (hidden one).

Der Exponent ist mit einem Offset versehen. Bei Single-Zahlen 127, bei Double-Zahlen 1023 und bei Extended-Zahlen 32767. D. h. die dargestellten Exponenten sind um diesen Offset zu vermindern um ihre „normalen“ Dualdarstellungen zu bekommen. Man erreicht dadurch, dass keine negativen Exponenten auftauchen können.

Folgende Sonderfälle werden unterschieden:

Eine 0 wird dargestellt durch Vorzeichen=0, Mantisse = 000...0, Exponent = 000...0.

Eine ∞ wird dargestellt durch Mantisse = 000...0, Exponent = 111...1.

Eine nicht darstellbare Zahl (NaN, not a number) wird dargestellt als Mantisse ≠ 0 und Exponent = 111...1.

Wenn der Exponent 000...0 ist und die Mantisse ≠ 000...0, so wird die versteckte 1 nicht einkopiert.

1.6 Codierung von Zeichen in Binärdarstellung

Bisher haben wir uns mit der Codierung von Zahlen (z.B. Typ Integer oder Typ float) beschäftigt. Es werden aber auch andere Codierungen benutzt. Die folgende Tabelle zeigt verschiedene Codes für die Ziffern von 0 bis 9, die in Rechenanlagen genutzt werden:

Dezimalziffer	**Dual (8421)**	**Aiken**	**3-Exzess**	**2aus5Code**
0	0000	0000	0011	11000
1	0001	0001	0100	00011
2	0010	0010	0101	00101
3	0011	0011	0110	00110
4	0100	0100	0111	01001
5	0101	1011	1000	01010
6	0110	1100	1001	01100
7	0111	1101	1010	10001
8	1000	1110	1011	10010
9	1001	1111	1100	10100
Gewichte	8421	2421	keine	74210

Auch mit dieser Codierung kann man aber nur numerische Werte verarbeiten. Um nun alle Zeichen, also auch die Buchstaben und Sonderzeichen in Rechenanlagen verarbeiten zu können, haben sich zwei Standards durchgesetzt, EBCDIC und ASCII. Diese sind auf den folgenden Tabellen dargestellt.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
		0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	0000																
1	0001																
2	0010																
3	0011																
4	0100	blank										§	.	<	(	+	|
5	0101	&										!	$	•	)	;	
6	0110	-	/									^	,	%		>	?
7	0111											:	#	@	´	*	“
8	1000		a	b	c	d	e	f	g	h	i						
9	1001		j	k	l	m	n	o	p	q	r						
A	1010			s	t	u	v	w	x	y	z						
B	1011																
C	1100		A	B	C	D	E	F	G	H	I						
D	1101		J	K	L	M	N	O	P	Q	R						
E	1110			S	T	U	V	W	X	Y	Z						
F	1111	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						

EBCDIC**(Extended Binary Coded Decimal Interchange Code)**

ASCII

(American Standard Code for Information Interchange)

	Hex				0	1	2	3	4	5	6	7
Hex					**000**	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
1	**0**	**0**	**0**	**1**	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	**0**	**0**	**1**	**0**	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
3	**0**	**0**	**1**	**1**	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	**0**	**1**	**0**	**0**	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	**0**	**1**	**0**	**1**	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	**0**	**1**	**1**	**0**	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	**0**	**1**	**1**	**1**	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
8	**1**	**0**	**0**	**0**	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	**1**	**0**	**0**	**1**	SKIP	EM	)	9	I	Y	i	y
A	**1**	**0**	**1**	**0**	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	**1**	**0**	**1**	**1**	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	**1**	**1**	**0**	**0**	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	**1**	**1**	**0**	**1**	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	**1**	**1**	**1**	**0**	SO	HOME	.	>	N	∧	n	~
F	**1**	**1**	**1**	**1**	SI	NL	/	?	O	_	o	DEL

ASCII verwendet nur 7 Bits für die eigentliche Codierung. Das 8-te Bit eines Bytes (in dem jedes Zeichen codiert wird) wird als Paritätsstelle zur Fehlererkennung benutzt. Dieses achte Bit wird immer so gesetzt, dass die Anzahl der 1en im Byte gerade ist. Auf diese Weise ist bei einer Übertragung jeder Fehler zu erkennen, bei dem genau ein Bit (oder eine ungerade Anzahl) innerhalb des Bytes verfälscht wurde.

2 Boolesche Funktionen und Schaltnetze

2.1 Boole'sche Funktionen

Definition: Sei $\mathbb{B} = \{0,1\}$ und n und m natürliche Zahlen. Eine Boolesche Funktion f mit n Eingabevariablen und m Ausgabevariablen

$$f: B^n \rightarrow B^m$$

ordnet jedem n-stelligen Vektor $(x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1})$ von Eingabevariablen einen m-stelligen Vektor $(y_0, y_1, y_2, ..., y_{m-1})$ von Ausgabevariablen zu.

Wir bezeichnen $X = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ als (n-stelliges) Eingabewort und $Y = (y_0, y_1, y_2, ..., y_{m-1})$ als (m-stelliges) Ausgabewort über $\mathbb{B}$ (und verwenden gelegentlich auch die Schreibweise $X = x_0x_1x_2 ...x_{n-1}$ und $Y = y_0y_1y_2...y_{m-1}$).

Ein Schaltnetz ist eine technische Realisierung einer solchen Booleschen Funktion. Man kann es sich als einen schwarzen Kasten vorstellen, der n Eingänge und m Ausgänge hat. Diese Eingänge könnten zum Beispiel Schalter sein, die zwei mögliche Stellungen haben und die Ausgänge könnten kleine Lämpchen sein, die an oder aus sein können. Eine andere, unseren Anwendungen sehr schön entsprechende Vorstellung ist ein elektronisches Bauteil, in das n Leitungen hereinführen und m heraus. Ein Eingabewort ist in diesem Falle eine Belegung jeder Eingabeleitung mit einem von zwei unterschiedlichen Spannungspotentialen, z.B. 0 = 0V und 1 = 3,3V. Ein Ausgabewort entspricht einer ebensolchen Belegung für alle m Ausgabeleitungen. Diese Vorstellung hat den Vorteil, dass man Schaltnetze zusammenschalten, d.h. die Ausgaben des ersten mit den Eingaben des zweiten identifizieren kann.

Jede Komponente des Eingabewortes bezeichnen wir als Eingabevariable und jede Komponente des Ausgabewortes als Ausgabevariable.

Beispiele für Schaltnetze werden wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen.

2.1.1 Beschreibungsformen für Boolesche Funktionen und Schaltnetze

Sie kennen bei reellwertigen Funktionen unterschiedliche Beschreibungsformen. Neben einer Wertetabelle können Sie eine Funktion als Formel oder z.B. als Graph beschreiben.

Ebenso gibt es für Boolesche Funktionen gängige Beschreibungsformen, die wir hier kennenlernen wollen.

2.1.2 Wertetabelle

Die Wertetabelle einer Booleschen Funktion gibt die Zuordnung der Belegung der Eingabevariablen zu der Belegung der Ausgabevariablen explizit an. Für jede mögliche Belegung der Eingabevariablen ist eine Zeile vorhanden, die sagt: für dieses Eingabewort ist der Funktionswert dieses Ausgabewort. Wegen der (häufig verwendeten) Interpretation der Werte von $\mathbb{B}$ als True (= 1) und False (= 0) wird die Wertetabelle in der Literatur auch oft als Wahrheitstabelle bezeichnet.

Beispiel:

Eingabevariablen			Ausgabevariablen	
X			Y	
x_0	x_1	x_2	y_0	Y_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Die Wertetabelle hat den Nachteil, dass sie u.U. sehr groß werden kann, z.B. wenn für 10 Eingabevariablen $2^{10} = 1024$ Zeilen erforderlich sind.

2.1.3 Formel

Wie bei reellwertigen Funktionen kann eine Boolesche Funktion (und somit das entsprechende Schaltnetz) auch als Formel beschrieben werden. Dabei werden die Variablen durch Operatoren miteinander verknüpft. Dies sind nun aber nicht arithmetische Operatoren wie + und *, sondern Boolesche (logische) Operatoren wie „und“ (als Zeichen $\wedge$), „oder“ (als Zeichen $\vee$) und „nicht“ (als Zeichen ein Querstrich über der Variablen). Die in der obigen Wahrheitstabelle spezifizierte Boolesche Funktion könnte als Formel so geschrieben werden:

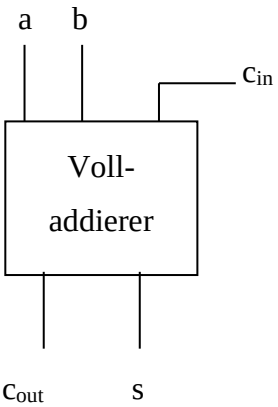
$$y_0 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,x_2 + \overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2} + x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_0\,x_1\,x_2$$

$$y_1 = x_1\,x_2 + x_0\,x_2 + x_0\,x_1$$

Was genau „und“, „oder“ und „nicht“ bedeutet, werden wir in den folgenden Abschnitten lernen.

2.1.4 Symbol

Das oben verwendete Beispiel stellt einen Volladdierer dar, ein elementares Schaltnetz, das verwendet werden kann, um binäre Zahlen miteinander zu addieren. Als Schaltsymbol kann er folgendermaßen angegeben werden.

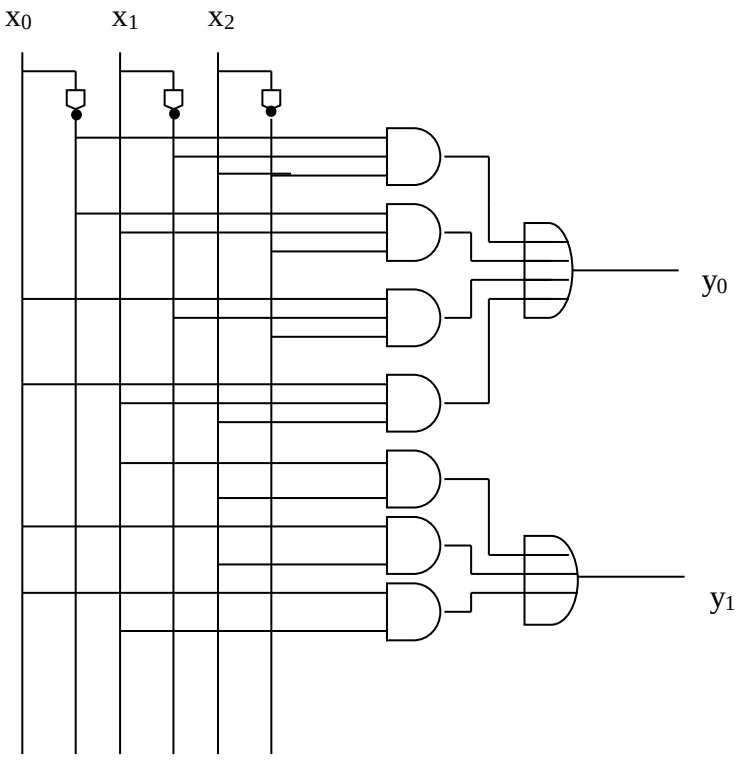


Wobei a, b, c_{in} drei 1-Bit Ein- und s, c_{out} zwei 1-Bit Ausgänge sind.

Neben den Ein- und Ausgabevariablen wird durch das Pluszeichen seine Funktion beschrieben.

2.1.5 Netz von Elementarschaltungen

Die Auflösung in Elementarschaltungen, die die technisch realisierbaren atomaren Bausteine eines Schaltnetzes darstellen, nennt man Realisierung.



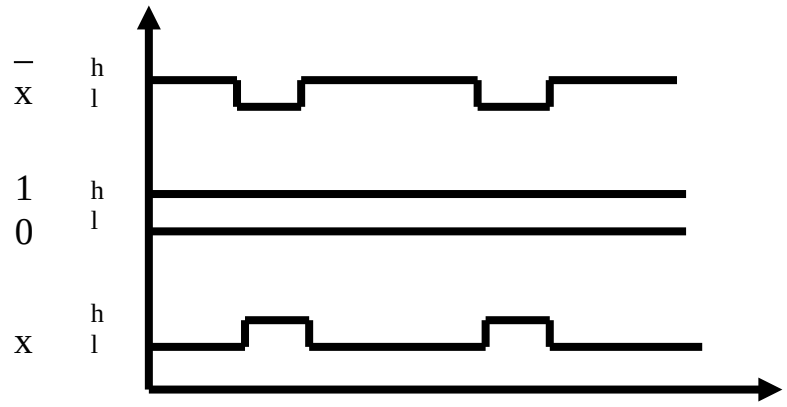
Das Bild zeigt die Realisierung des Volladdierers auf der Basis in der oben angegebenen Formel. Die verwendeten Bauteile sind sogenannte „und“- , „oder“- und „nicht“-Gatter, deren Funktion im Abschnitt 2.5 erklärt wird.

2.1.6 Boolesche Funktionen mit einer Ein- und einer Ausgabevariablen

Es gibt vier verschiedene Boolesche Funktionen mit einer Eingabevariablen x_0. Das ergibt sich dadurch, dass diese Eingabevariable zwei Werte haben kann und es $2^2 = 4$ Möglichkeiten gibt, diese beiden Werte auf die beiden möglichen Werte der Ausgangsvariablen abzubilden.

Benennung	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$	Algebraische Darstellung
Nullfunktion	0	0	0
Identität	0	1	x_0
Negation	1	0	$\overline{x_0}$
Einsfunktion	1	1	1

Das Ein/Ausgabeverhalten von Booleschen Funktionen kann man anhand von Impulsdiagrammen studieren. Hierbei wird auf der waagerechten Achse die Zeit abgetragen und auf der senkrechten die Werte der in Diskussion stehenden Funktionen. Um die Verläufe der Funktionen unterscheiden zu können, werden häufig mehrere unterschiedliche Funktionen übereinander in dasselbe Diagramm gezeichnet.



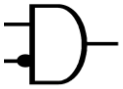
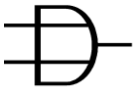
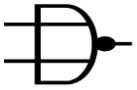
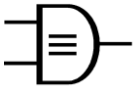
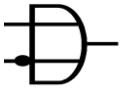
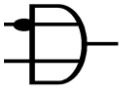
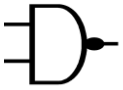
2.1.7 Boolesche Funktionen mit zwei Ein- und einer Ausgabevariablen

Wenn wir k Eingabevariablen und eine Ausgabevariable haben, gibt es 2^{2^k} Möglichkeiten, die 2^k möglichen Belegungen der Eingabevariablen auf zwei Werte abzubilden. Es gibt daher 16 verschiedene Boolesche Funktionen mit zwei Eingabevariablen und einer Ausgabevariablen. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

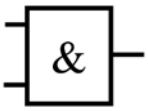
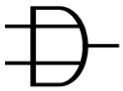
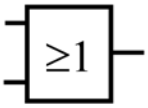
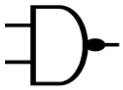
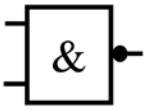
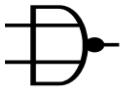
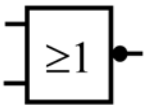
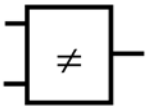
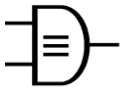
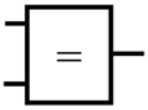
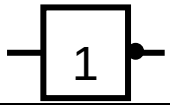
Eingabevariablen: x_0,x_1

Ausgabevariable: y

Die Schaltsymbole entsprechen der alten (aber noch heute sehr gebräuchlichen) europäischen Standardisierung. Die wichtigsten Symbole sind in der darauf folgenden Tabelle noch einmal dargestellt, zusammen mit den entsprechenden Symbolen nach neuem internationalen Standard.

Benennung					**Algebraische Darstellung**	
x_1	0	0	1	1		
x_0	0	1	0	1		
Nullfunktion	0	0	0	0	0	0
UND (Konjunktion)	0	0	0	1	$x_0 x_1$	
(UND)	0	0	1	0	$\overline{x_0} x_1$	
(Identität)	0	0	1	1	x_1	X_1
(UND)	0	1	0	0	$x_0 \overline{x_1}$	
(Identität)	0	1	0	1	x_0	X_0
XOR (Antivalenz)	0	1	1	0	$x_0 \neq x_1$	
ODER (Disjunktion)	0	1	1	1	$x_0 + x_1$	
NOR (Peirce-Fkt.)	1	0	0	0	$\overline{x_0 + x_1}$	
XNOR (Äquivalenz)	1	0	0	1	$x_0 \equiv x_1$	
(Negation)	1	0	1	0	$\overline{x_0}$	
Implikation	1	0	1	1	$\overline{x_0} + x_1$	
(Negation)	1	1	0	0	$\overline{x_1}$	
(Implikation)	1	1	0	1	$x_0 + \overline{x_1}$	
NAND (Sheffer-Fkt.)	1	1	1	0	$\overline{x_0 x_1}$	
Einsfunktion	1	1	1	1	1	1

Alte und neue Symbole:

Bezeichnung:	**Alte Symbole:**	**Neue Symbole:**
UND		
ODER		
NAND		
NOR		
XOR		
XNOR		
NOT		

2.2 Boolesche Algebra

Kanonische disjunktive und konjunktive Normalform sind im Allgemeinen aufwendige Realisierungen von Schaltfunktionen. Der Begriff *aufwendig* kann konkretisiert werden anhand von Kostenmaßen. Diese sind in der Regel abhängig von der Schaltungstechnologie die zur Realisierung benutzt wird. Zwei Maße gelten jedoch offensichtlich für Realisierungen in allen Schaltkreisfamilien: Die Anzahl der Gatter und die Anzahl der Eingänge pro Gatter. Der Schaltkreisentwerfer sollte daher stets bestrebt sein, seine Schaltung in Hinsicht auf diese beiden Maße zu minimieren.

Als zu Grunde liegende Theorie zu diesem Gebiet hat sich die Boolesche Algebra (Schaltalgebra) zu einem nützlichen Werkzeug entwickelt. Sie stellt einen Satz Regeln und Verfahren zur Verfügung, mit denen eine Schaltung systematisch in Hinsicht auf die Anzahl der Gatter und die Anzahl der Eingänge pro Gatter optimiert werden kann.

Der Booleschen Algebra liegen die folgenden vier Axiome zugrunde, die für alle Booleschen Funktionen mit Variablen x, x_0, x_1, x_2 und Operatoren + (oder) und · (und) gelten. Variablen können dabei auch wieder Ausdrücke der Booleschen Algebra sein (etwa $x=(x_1+x_2)$).

1. Axiom - Kommutativgesetze:

$$\forall x_0, x_1 : x_0 + x_1 = x_1 + x_0$$

$$\forall x_0, x_1 : x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0$$

2. Axiom - Neutrale Elemente:

$$\forall x : 0 + x = x$$

$$\forall x : 1 \cdot x = x$$

3. Axiom - Distributivgesetze:

$$\forall x_0, x_1, x_2 : (x_0 + x_1) x_2 = x_0 x_2 + x_1 x_2$$

$$\forall x_0, x_1, x_2 : (x_0 x_1) + x_2 = (x_0 + x_2)(x_1 + x_2)$$

4. Axiom - Inverses Element:

$$\forall x \exists \overline{x} : (\overline{x} + x = 1) \wedge (\overline{x} \cdot x = 0)$$

Das inverse Element ist eindeutig.

Beweis:

Sei x Eingabevariable. Seien x_1, x_2 inverse Elemente zu x.

$$x_1 = x_1 \cdot 1 + 0 = x_1 \cdot (x_2 + x) + x_2 x = x_1 x_2 + x_1 x + x_2 x = x_1 x_2 + 0 + x_2 x = x_2 x_1 + x_2 x$$
$$= x_2 \cdot (x_1 + x) = x_2 \cdot 1 = x_2$$

Das inverse Element zu x ist also eindeutig.

Aus diesen vier Axiomen lässt sich eine Reihe von Aussagen ableiten:

Satz 1:

Für jede Eingabevariable x gilt: $x + 1 = 1$

Beweis:

$$x + 1 = 1 \cdot (x + 1) = (x + \overline{x}) \cdot (x + 1) = (\overline{x} + x) \cdot (1 + x) = (\overline{x} \cdot 1) + x = \overline{x} + x = 1$$

Satz 2:

Für jede Eingabevariable x gilt: $x \cdot 0 = 0$

Satz 3:

Für jede Eingabevariable x gilt: $x + x = x$

Beweis:

$$x + x = (1 \cdot x) + (1 \cdot x) = (1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

Satz 4:

Für jede Eingabevariable x gilt: $x \cdot x = x$

Beweis:

$$x \cdot x = (0 + x) \cdot (0 + x) = (0 \cdot 0) + x = 0 + x = x$$

Assoziativgesetze:

Satz 5:

$$\forall x_0, x_1, x_2 : (x_0 x_1) x_2 = x_0 (x_1 x_2)$$

Satz 6:

$$\forall x_0, x_1, x_2 : (x_0 + x_1) + x_2 = x_0 + (x_1 + x_2)$$

Satz 7:

Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt:

$$x_0 + (x_0 x_1) = x_0$$

Satz 8:

Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt:

$$x_0 (x_0 + x_1) = x_0$$

Beweis:

Solange wir diese Sätze nur über B={0, 1} betrachten, kann man die „Beweise“ auch über das Ausprobieren aller Möglichkeiten führen. Ein Beispiel dafür sieht so aus.

x_0	x_1	x_0x_1	$x_0+(x_0x_1)$	x_0+x_1	$x_0(x_0+x_1)$
0	0	0	**0**	0	**0**
0	1	0	**0**	1	**0**
1	0	0	**1**	1	**1**
1	1	1	**1**	1	**1**

Formaler Beweis:

$$x_0 + x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot 1 + x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot (\overline{x_1} + x_1) + x_0 \cdot x_1 = (x_0 \cdot \overline{x_1} + x_0 \cdot x_1) + x_0 \cdot x_1 =$$
$$= x_0 \cdot \overline{x_1} + (x_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot x_1) = x_0 \cdot \overline{x_1} + x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot (\overline{x_1} + x_1) = x_0 \cdot 1 = x_0$$

Führen Sie die Beweise zu den anderen Sätzen als Übungsaufgabe.

Satz 9:

Für jede Eingabevariable x gilt:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Satz 10:

Es gilt: $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$.

Satz 11: (Erstes De Morgansches Gesetz):

Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt: $\overline{x}_0 + \overline{x}_1 = \overline{x_0 \cdot x_1}$

Satz 12: (Zweites De Morgansches Gesetz):

Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt: $\overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1 = \overline{x_0 + x_1}$

Satz 13: (Erste Vereinfachungsregel):

Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt: $(x_0 + x_1)(x_0 + \overline{x_1}) = x_0$

Satz 14: (Zweite Vereinfachungsregel):

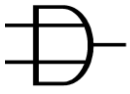
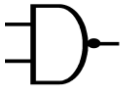
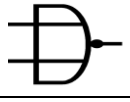
Für jede Eingabevariable x_0, x_1 gilt: $(x_0 x_1) + (x_0 \overline{x_1}) = x_0$

2.3 Realisierung von Boole'schen Funktionen mit Schaltnetzen

Definition:

Ein *Schaltnetz* ist eine technische Realisierung einer Booleschen Funktion. Schaltnetze können durch Verbindung von Gattern und Leitungen aufgebaut werden.

Das einfachste Schaltnetz ist eine Leitung. Sie hat einen Eingang und einen Ausgang und sie repräsentiert die Identitätsfunktion, denn der Ausgang ist immer gleich dem Eingang. Mittlerweile kennen wir aber weitere Elementarbausteine, die komplexere Boolesche Funktionen realisieren. Zu diesen zählen das Nicht-Gatter (Inverter, not-gate, Negation) deren Ausgang immer das Inverse des Eingangs ist, das Und-Gatter (and-gate, Konjunktion), dessen Ausgang genau dann 1 ist, wenn alle Eingänge 1 sind und das Oder-Gatter (or-gate, Disjunktion), das eine 1 liefert, wenn mindestens einer der Eingänge 1 ist. Eine Übersicht der wichtigsten Gatter mit zwei Eingängen mit den gebräuchlichsten Schaltsymbolen findet sich in der folgenden Tabelle.

AND (UND)	
OR (ODER)	
NAND (Nicht AND)	
NOR (Nicht ODER)	

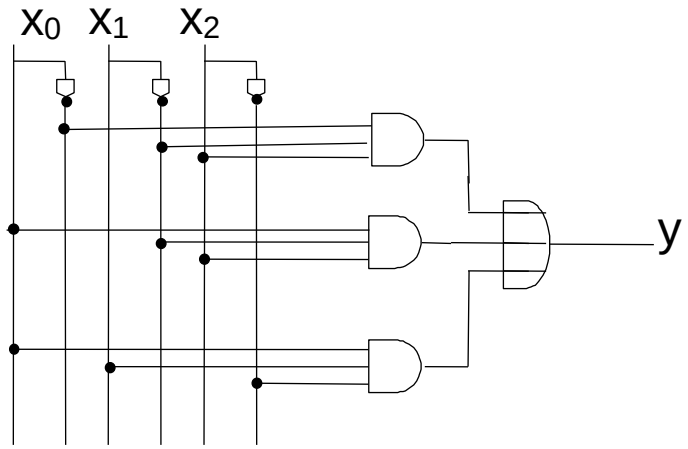
Als Zeichen für „oder" ist $\vee$ oder das Pluszeichen + gebräuchlich. Für „und" wird $\wedge$ und das Malzeichen $\cdot$ benutzt. Letzteres wird häufig (wie in der Mathematik) weggelassen, wenn klar ist, dass es sich um eine Boolesche Verknüpfung zwischen zwei Variablen handelt.

2.3.1 Minterme und kanonische disjunktive Normalform

Boolesche Funktionen können in der ersten Stufe bestimmte Eingangsvariablen oder deren Inverse mit und-Operationen durch eine Oder-Operation zusammengefügt werden. Eine solche zweistufige Form nennt man „disjunktive Normalform (DNF)“.

Definition: Produktterm, DNF;

Beispiel:



Die folgende Tabelle zeigt eine zu realisierende Funktion mit drei Eingabevariablen. Genau die Kombinationen der Eingabewerte, für die der Ausgang 1 ist, entsprechen einem *Minterm*. Ein Minterm (Vollkonjunktion, Minimaler konjunktiver Term) ist eine konjunktive Verknüpfung, in der alle Eingabevariablen genau einmal entweder in invertierter oder in nichtinvertierter Form auftauchen. Jede Zeile der Wertetabelle entspricht einem Minterm. Die Mintermfunktionen, für die Minterme, deren Wert 1 ist, sind in der Tabelle mit M_0 bis M_2 bezeichnet. Beispiel:

Eingangsvariablen			**Negationen**			**Mintermfunktionen**	**Ausgangsvariable**
x_0	x_1	x_2	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$		
0	0	0	1	1	1		0
0	0	1	1	1	0	$M_0 = \overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1 \cdot x_2$	1
0	1	0	1	0	1		0
0	1	1	1	0	0		0
1	0	0	0	1	1		0
1	0	1	0	1	0	$M_1 = x_0 \cdot \overline{x}_1 \cdot x_2$	1
1	1	0	0	0	1	$M_2 = x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x}_2$	1
1	1	1	0	0	0		0

Mintermfunktionen:

$$M_0 = \overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1 \cdot x_2$$

$$M_1 = x_0 \cdot \overline{x}_1 \cdot x_2$$

$$M_2 = x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x}_2$$

Definition:

Ein *Minterm* einer Booleschen Funktion ist eine Konjunktion (Und-Verknüpfung) aller Eingangsvariablen, wobei jede genau einmal entweder in nicht invertierter oder in invertierter Form auftritt.

Die Ausgangsfunktion kann man nun realisieren, indem man die Minterme, deren Wert 1 ist, durch ein großes Oder-Gatter miteinander verknüpft.

$$y = M_0 + M_1 + M_2 = \overline{x}_0 \overline{x}_1 x_2 + x_0 \overline{x}_1 x_2 + x_0 x_1 \overline{x}_2$$

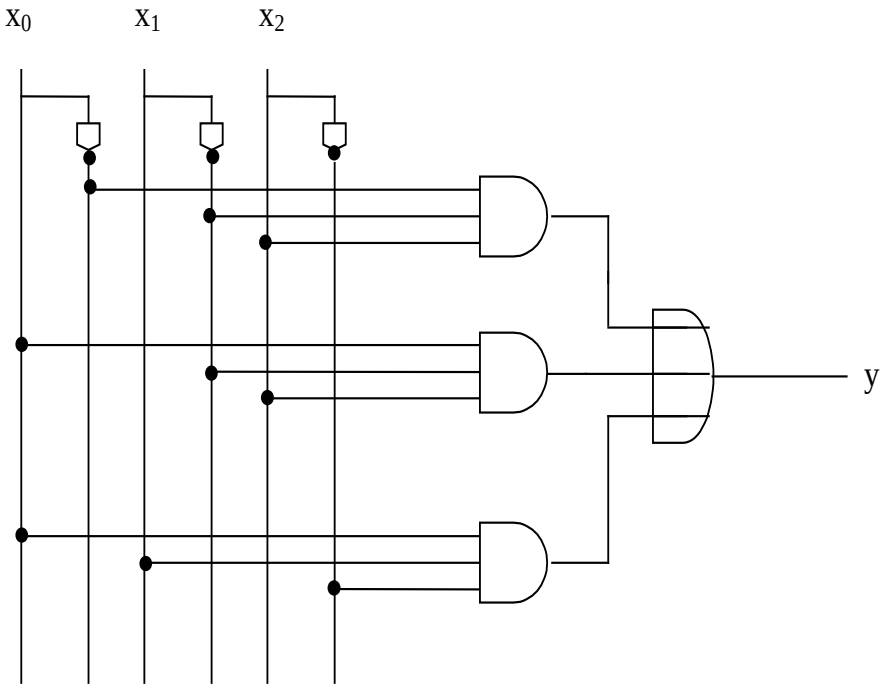
Die Oder-Verknüpfung sorgt dafür, dass jede eins, die durch eine der Mintermfunktionen erzeugt wird, auch an den Ausgang für y gelangt.

Diese Form der Oder-Verknüpfung aller Minterme, für die die Ausgangsfunktion den Wert eins annimmt, wird *kanonische disjunktive Normalform* (KDNF) genannt.

Definition:

Die *kanonische disjunktive Normalform* (KDNF) einer Booleschen Funktion ist die Disjunktion (Oder-Verknüpfung) aller Minterme, die für diese Funktion den Wert logisch 1 annehmen.

Das folgende Bild zeigt die schaltungstechnische Realisierung der kanonischen disjunktiven Normalform der Funktion aus dem obigen Beispiel unter Verwendung von Invertern und Und- und Oder-Gattern.



2.3.2 Maxterme und kanonische konjunktive Normalform

Neben der kanonischen disjunktiven Normalform, die aus Mintermen aufgebaut ist, gibt es die duale Möglichkeit, eine Schaltfunktion aus *Maxtermen* aufzubauen. Wir verwenden als Beispiel wieder die Tabelle für eine Funktion, deren Ausgang auf eins ist, wenn genau zwei ihrer Eingänge auf eins sind. Die Maxterme werden als Oder-Verknüpfung der Eingänge gebildet, für die die Ausgangsfunktion 0 ist.

Eingangsvariablen			**Negationen**			**Maxtermfunktionen**	**Ausgangsvariable**
x_0	x_1	x_2	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$		
0	0	0	1	1	1	$M_0 = x_0 + x_1 + x_2$	0
0	0	1	1	1	0	$M_1 = x_0 + x_1 + \overline{x}_2$	0
0	1	0	1	0	1	$M_2 = x_0 + \overline{x}_1 + x_2$	0
0	1	1	1	0	0		1
1	0	0	0	1	1	$M_3 = \overline{x}_0 + x_1 + x_2$	0
1	0	1	0	1	0		1
1	1	0	0	0	1		1
1	1	1	0	0	0	$M_4 = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2$	0

Maxtermfunktionen:

$$M_0 = x_0 + x_1 + x_2$$
$$M_1 = x_0 + x_1 + \overline{x}_2$$
$$M_2 = x_0 + \overline{x}_1 + x_2$$
$$M_3 = \overline{x}_0 + x_1 + x_2$$
$$M_4 = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2$$

Definition:

Ein *Maxterm* einer Booleschen Funktion ist eine Disjunktion (Oder-Verknüpfung) aller Eingangsvariablen, wobei jede genau einmal entweder in nicht invertierter oder in invertierter Form auftritt. Jeder Maxterm entspricht allen Zeilen der Wertetabelle außer einer. Diese nennt man die den Maxterm charakterisierende Zeile.

Die Ausgangsfunktion kann man nun realisieren, indem man die Maxterme, in deren charakterisierenden Zeilen die Funktion 0 ist, durch ein großes Und-Gatter miteinander verknüpft.

$$y = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4$$

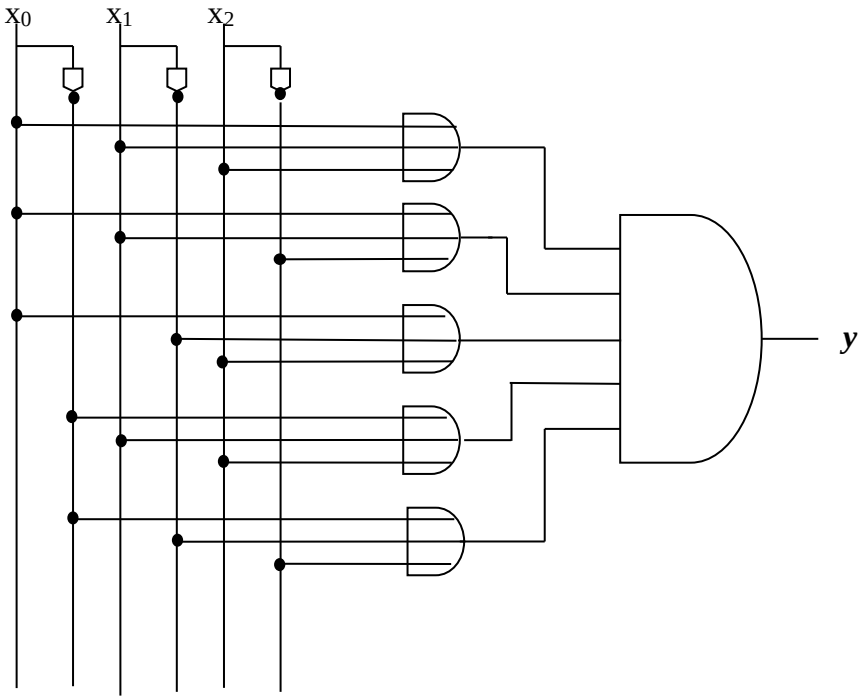
$$y = (x_0 + x_1 + x_2) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x}_2) \cdot (x_0 + \overline{x}_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_0 + x_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2)$$

Definition:

Die *kanonische konjunktive Normalform* (KKNF) einer Booleschen Funktion ist die Konjunktion (Und-Verknüpfung) aller Maxterme, die für diese Funktion den Wert logisch 0 annehmen.

Die Und-Verknüpfung sorgt dafür, daß jede Null, die durch eine der Maxtermfunktionen erzeugt wird, auch an den Ausgang für y gelangt. Nur wenn keiner der Maxterme eine Null produziert, kann die Ausgangsfunktion Eins werden.

Das folgende Bild zeigt die schaltungstechnische Realisierung der konjunktiven Normalform der Funktion aus dem obigen Beispiel unter Verwendung von Invertern und Und- und Oder-Gattern.



Übungsaufgabe: errechnen der KKNF aus der KDNF mit Hilfe der Gesetze von De Morgan.

2.4 Minimierung von Booleschen Funktionen

Die KKNF und KDNF sind direkt als zweistufige Netzwerke abbildbar, aber sie sind nicht unbedingt minimal in der Anzahl der benötigten Bauelemente. Im Folgenden werden verschiedene Methoden zur Minimierung der Funktionen vorgestellt.

2.4.1 Minimierung von Booleschen Funktionen mit Mitteln der Booleschen Algebra

Durch Anwendung der Vereinfachungsregeln gelingt es, aus der kanonischen disjunktiven Normalform eine äquivalente minimale Darstellung der Ausgabefunktion zu bestimmen. Diese minimale Darstellung heißt Disjunktive Minimalform (DMF).

Definition:

Eine aus einer Disjunktion von Produkttermen bestehende Boolesche Funktion f heißt *disjunktive Minimalform* (DMF), wenn

- jede äquivalente Darstellung derselben Ausgabefunktion mindestens genauso viele Produktterme besitzt, und wenn
- jede für äquivalente Darstellung derselben Ausgabefunktion mit gleichviel Produkttermen die Anzahl der Eingänge in die Produktterme mindestens genauso groß ist wie die Anzahl der Eingänge in die Produktterme von f.

Dazu werden mit Hilfe der Sätze und Axiome der Booleschen Algebra Umformungen derart vorgenommen, dass die Anzahl und die Länge der einzelnen Produktterme minimiert wird.

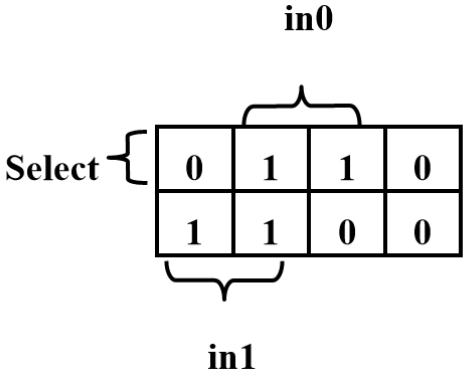
Besonders hilfreich sind dabei die Sätze 7,8 und die Vereinfachungsregeln Satz 13 und 14, mit deren Hilfe man Terme und Variablen zusammenfassen kann. Allerdings muss genau daraufhin gearbeitet werden, dass auch eine Minimalform dabei entsteht. Dazu gibt es eine Reihe von graphischen Hilfsmitteln, die im Folgenden besprochen werden.

2.4.2 Minimierung von Booleschen Funktionen mit KV-Diagrammen

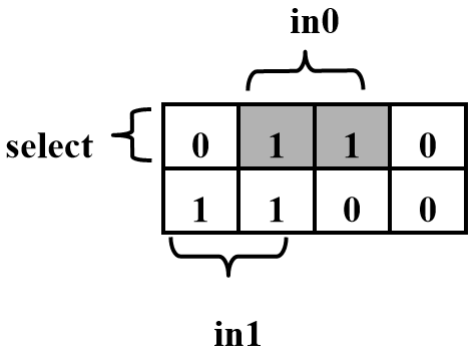
Eine einfache, intuitive Methode zur Minimierung von Funktionen mit wenigen Eingabevariablen liefert die Methode der Karnaugh-Veitch-Diagramme (KV-Diagramme). Die Ränder eines rechteckigen Gitters werden so mit den Variablennamen beschriftet, dass jeweils die Hälfte der Zeilen (Spalten) den nicht invertierten Wert und die andere Hälfte den invertierten Wert der jeweiligen Variablen repräsentiert. Wenn mehrere Variablen am selben oder an gegenüberliegenden Rändern abgetragen werden, müssen auch hier die überlappenden Bereiche und die nicht überlappenden Bereiche gleich groß gewählt werden.

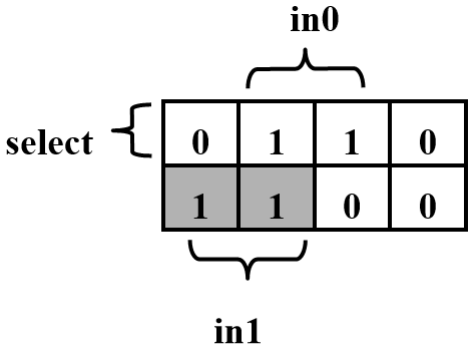
Beispiel:

KV-Diagramm für y=f(in1, in2, select).



Jedes Feld stellt einen Minterm dar. Im obigen Beispiel steht z.B. die linke Eins in der oberen Zeile für $Min_1 = select \cdot in_0 \cdot in_1$. Wenn die Ausgangsfunktion für die Eingabekombination, die das Feld repräsentiert, Eins ist, wird eine Eins eingetragen; Ist sie Null, wird eine Null eingetragen. Sodann werden Blöcke von zusammenhängenden Einsen gesucht. Bei jeweils zwei benachbarten Einsen wird eine Konjunktion zweier Minterme betrachtet, bei denen sich genau eine Variable ändert. Dabei steht sowohl der Wert der Variable als auch ihr Komplement in der Konjunktion. Ein Zusammenfassen von zwei Einsen zu einem Block der Größe 2 entspricht daher einer Anwendung der Vereinfachungsregel Satz 14, die eine Variable eliminiert, denn $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2 = x_1 \cdot (x_2 + \overline{x}_2) = x_1 \cdot (1) = x_1$. Ein Zusammenfassen von 4 Einsen entspricht zweimaliger Anwendung der Vereinfachungsregel, d.h. es werden 2 Variablen eliminiert, usw. Die Blöcke müssen immer rechteckige Bereiche aus 2^k Einsen sein, für ein ganzzahliges k.

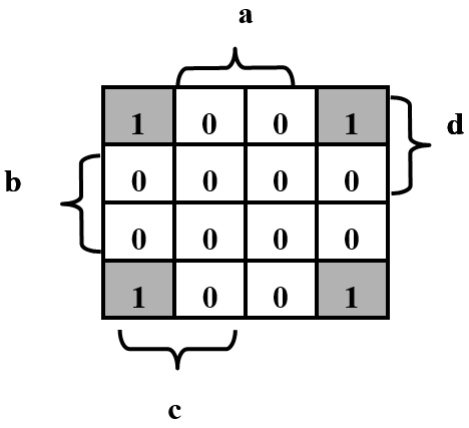




Durch Zusammenfassen aller schattierten Blöcke ergibt sich die minimierte Funktion:

$$y = select \cdot in0 + \overline{select} \cdot in1$$

Mit KV-Diagrammen kann man häufig eine Schaltungsminimierung „durch scharfes Hinsehen" betreiben. Man muss aber vorsichtig sein: Die gegenüberliegenden Ränder des Rechtecks sind als identisch zu betrachten, so dass sich topologisch ein Torus ergibt. Dadurch können auch Blöcke von Einsen zusammengefasst werden, die aus Teilen bestehen, die an gegenüberliegenden Rändern liegen. In einem KV-Diagramm mit vier Eingabevariablen z.B. kann im Extremfall ein Block aus vier Einsen gebildet werden, die in den vier Ecken des Diagramms stehen.

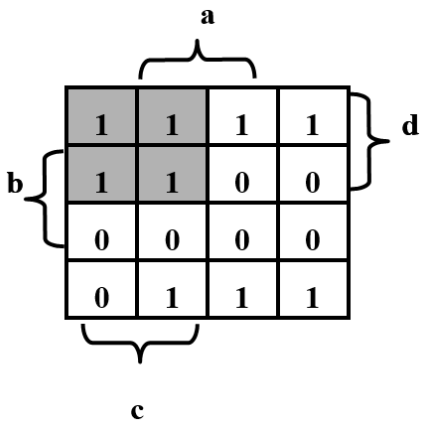


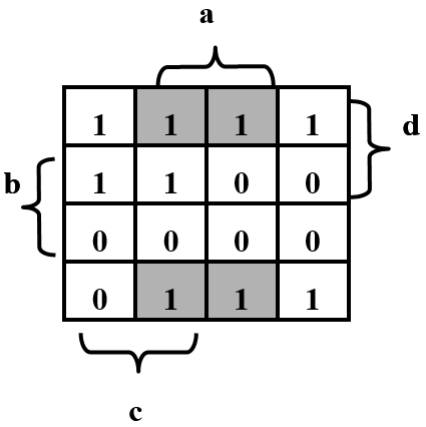
Die Blöcke können sich überlappen. Das Ziel ist, alle Einsen mit einer minimalen Anzahl von Blöcken zu überdecken, wobei die Größe der einzelnen Blöcke maximiert wird.

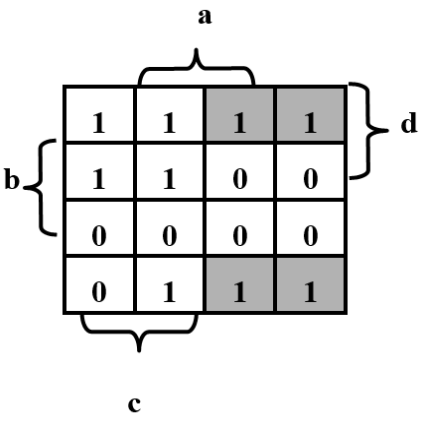
Beispiele:

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1





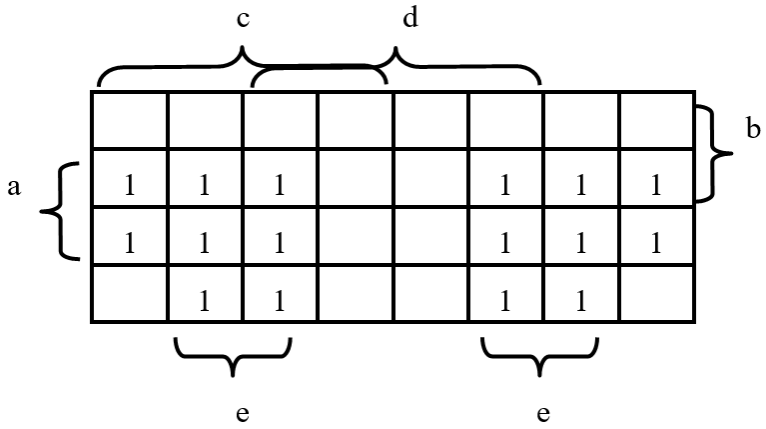


$$f = a\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + cd$$

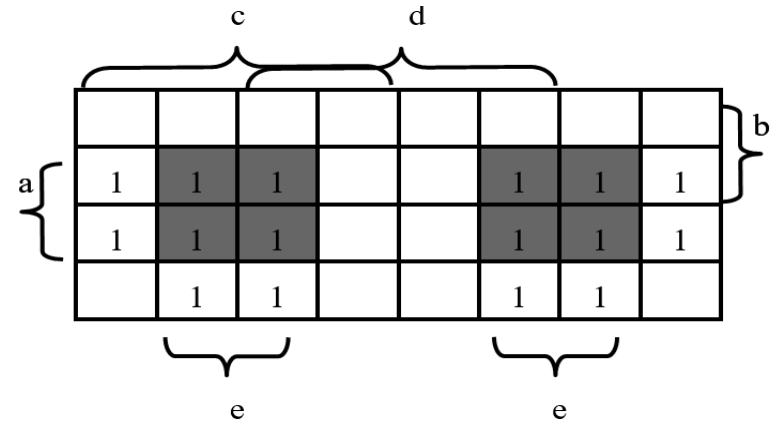
Wenn die Anzahl der Variablen größer als vier wird, kommt ein zusätzliches Problem dazu: man kann die Ränder nicht mehr so beschriften, dass die Variablen auf einem Torus einen zusammenhängenden Bereich abdecken. Daher muss bei jeder Variablen ab der vierten in Kauf

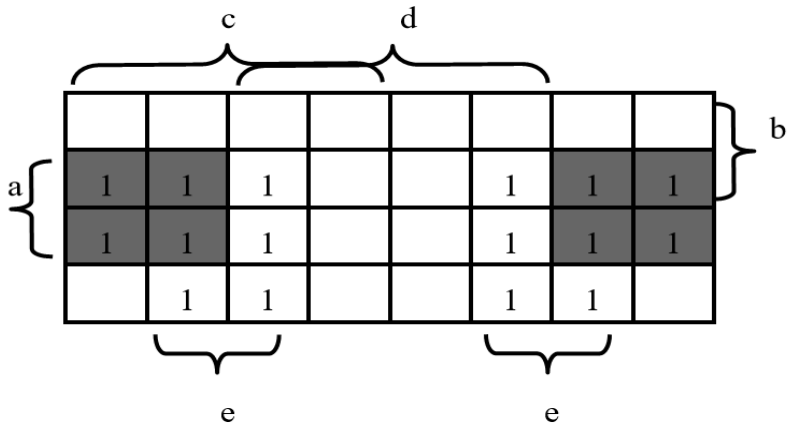
genommen werden, dass auch innen im Rechteck liegende Kanten als identisch angesehen werden müssen. Es erfordert hier etwas Übung, die Blöcke zusammenhängender Einsen in einem solchen Schema zu erkennen.

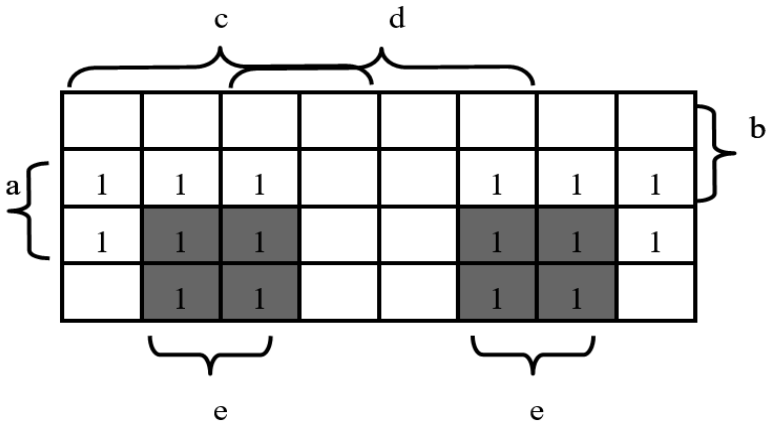
Beispiel:



Lösung:







$$f = ae + a\overline{d} + \overline{b}e$$

Allen Anfängern sei geraten, bei Funktionen mit mehr als 4 Variablen andere Techniken (z.B. Quine-McCluskey) zusätzlich zu den KV-Diagrammen zu verwenden.

2.4.3 Minimierung von Booleschen Funktionen mit dem Verfahren von Quine und McCluskey

KV-Diagramme können nur bis zur Anzahl von 4, höchstens 6 Variablen benutzt werden. Außerdem stellen sie eine Methode des scharfen Hinsehens dar und keine Systematik.

Eine systematische Methode zur Konstruktion der DMF ist das Verfahren von Quine und McCluskey. Es besteht darin, aus der KDNF durch wiederholtes Anwenden der zweiten Vereinfachungsregel zu einer Minimalform zu kommen. Dies ist dann die DMF.

Das Verfahren besteht aus der Hintereinanderausführung zweier Algorithmen: Der Algorithmus von McCluskey konstruiert systematisch alle Primterme. Das sind Konjunktionen mit einer minimalen Anzahl von Variablen, für die (ähnlich wie bei Mintermen) die Ausgangsfunktion 1 ist. Die Oder-Verknüpfung aller solcher Primterme ist zwar eine Realisierung der Funktion, aber noch nicht notwendigerweise die optimale. Durch das anschließend ausgeführte Verfahren von Quine werden aus der Gesamtheit der Primterme diejenigen ausgewählt, die die Funktion mit minimalem Aufwand realisieren.

<u>Der Algorithmus von McCluskey:</u>

Für eine Funktion mit n Eingabevariablen werden im ersten Schritt aus den Mintermen (die ja Produkte aus n Faktoren sind) alle möglichen Produktterme mit n-1 Faktoren gebildet, von denen jeder aus zwei Mintermen durch Eliminierung einer Variablen mit der zweiten Vereinfachungsregel hervorgeht. Alle Minterme, die aus einem der so konstruierten Produktterme durch Multiplikation mit einer weiteren Variablen entstehen, werden gestrichen, alle anderen werden als nicht minimierbar markiert. Doppelte Terme werden mit Satz 3 eliminiert.

Im nächsten Schritt wird auf die gleiche Weise mit den so entstandenen neuen Produkttermen verfahren, wobei Produkte mit n-2 Faktoren entstehen. Wieder wird danach überprüft, welche Terme der vorherigen Iteration durch die neu entstandenen Terme „überdeckt“ werden, d.h. durch Multiplikation mit nur einer Variablen daraus entstehen. Diese werden gestrichen, der Rest ist bereits minimiert. Doppelte Terme werden wieder eliminiert.

Auf diese Weise wird fortgefahren, bis keine kleineren Terme mehr entstehen. Alle markierten Terme sind Primterme.

Beispiel:

In diesem Beispiel wird mit $\overline{x}$ die invertierte Variable x bezeichnet.

$$abcd + ab\overline{c}d + a\overline{b}cd + \overline{a}bcd + \overline{a}\overline{b}cd + abc\overline{d} + a\overline{b}c\overline{d} + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} =$$

I II III IV V VI VII VIII IX

$$abd + acd + bcd + abc + \overline{b}cd + a\overline{b}c + \overline{a}cd + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + ac\overline{d} + bc\overline{d} + \overline{b}c\overline{d} + \overline{s}c\overline{d} =$$

A B C D E F G H I J K L M

$$cd + ac + cd + ac + bc + \overline{b}c + \overline{a}c + c\overline{d} + abd =$$

$$ac + bc + cd + \overline{a}c + \overline{b}c + c\overline{d} + abd =$$

$$c + c + c + abd = c + abd$$

Durch das Verfahren von McCluskey werden u. U. Primterme erzeugt, die redundant sind, weil die Zeilen in der Wertetabelle, die sie überdecken, bereits durch andere Primterme in der Liste der markierten Terme überdeckt werden. Das entspricht im KV-Diagramm der doppelten Auswahl von Teilblöcken, die nicht notwendig waren.

Beispiel:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

KDNF: $f = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}bc + ab\overline{c} + abc$

McCluskey: $f = \overline{a}c(\overline{b} + b) + ab(\overline{c} + c) + bc(\overline{a} + a) = \overline{a}c + ab + bc$

Die Funktion f wird aber bereits durch $ab + \overline{a}c$ realisiert. Der Term bc ist redundant, d.h. er überdeckt nur solche Zeilen in der Wertetabelle, die durch die anderen beiden Terme auch überdeckt werden. Deswegen muss nach der Konstruktion der Primterme mit McCluskey's Algorithmus das Verfahren von Quine angewendet werden, um aus der Liste der Primterme eine Auswahl nicht redundanter Primterme zu treffen.

Das Verfahren von Quine:

Zunächst wird eine Tabelle erstellt, die für jeden Minterm in der DNF eine Zeile und für jeden Primterm, der durch das Verfahren von McCluskey erzeugt worden ist, eine Spalte hat. In das Feld in der Zeile des Minterms M und der Spalte des Primterms P wird eine 1 eingetragen, wenn P M überdeckt, d.h. wenn aus P=1 folgt M=1. Andernfalls wird in dieses Feld eine 0 eingetragen.

Nachdem die Tabelle erstellt ist, werden dominante Zeilen gesucht. Das sind solche, bei denen in der ganzen Zeile nur eine 1 steht. Die Spalten in denen diese Einsen stehen werden markiert (der Primterm ist *nicht* redundant). Dominante Zeilen werden ausgestrichen. Wenn in einer nicht dominanten Zeile eine 1 steht, die auf einer markierten Spalte liegt, so wird die Zeile ebenfalls ausgestrichen.

Mit den nicht markierten Spalten und nicht ausgestrichenen Zeilen fährt man auf gleiche Weise fort. Wenn keine 1 mehr auf einer unmarkierten Spalte und einer ungestrichenen Zeile übrigbleibt, stellt die Oder-Verknüpfung der Primterme der markierten Spalten eine DMF der Funktion dar.

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Funktion mit der KDNF $f = ab\bar{c} + abc + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c$

Mit dem Verfahren von McCluskey hatten wir die Primterme $ab + bc + \bar{a}c$ ermittelt.

Die Quine Tabelle (Primterm/Minterm-Tabelle) sieht so aus:

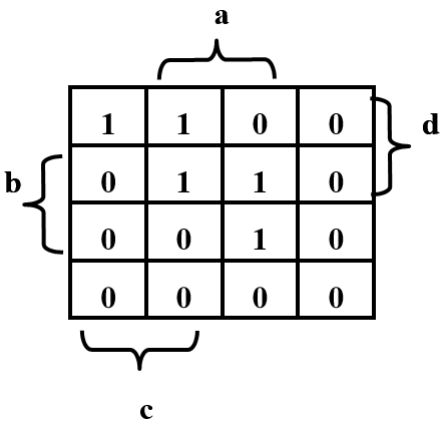
	ab	bc	$\bar{a}c$
$ab\bar{c}$	1		
abc	1	1	
$\bar{a}bc$		1	1
$\bar{a}\bar{b}c$			1

	ab	bc	$\bar{a}c$
$ab\bar{c}$	1		
abc	1	1	
$\bar{a}bc$		1	1
$\bar{a}\bar{b}c$			1

Die erste und letzte Zeile sind dominant. Dadurch werden die erste und dritte Spalte markiert. In diesen stehen Einsen in der zweiten und dritten Zeile, die somit auch gestrichen werden. Es bleibt keine 1 übrig. Das Ergebnis ist also $ab + \bar{a}c$.

Es kann vorkommen, dass keine dominante Zeile vorhanden ist. In diesem Falle kann eine beliebige Spalte mit einer maximalen Anzahl von Einsen gestrichen werden.

Beispiel:



KDNF: $f = \bar{a}\bar{b}cd + a\bar{b}cd + abcd + ab\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d}$

McCluskey: $f = \bar{b}cd + acd + abd + ab\bar{c}$

Quine:

	$\bar{b}cd$	acd	abd	$ab\bar{c}$
$\bar{a}\bar{b}cd$	1			
$a\bar{b}cd$	1	1		
$abcd$		1	1	
$ab\bar{c}d$			1	1
$ab\bar{c}\bar{d}$				1

Die erste und letzte Zeile sind dominant. Daraufhin werden die erste und vierte Spalte markiert. Dabei werden die zweite und vierte Zeile gestrichen.

	$\bar{b}cd$	acd	abd	$ab\bar{c}$
$\bar{a}\bar{b}cd$	1			
$a\bar{b}cd$	1	1		
$abcd$		1	1	
$ab\bar{c}d$			1	1
$ab\bar{c}\bar{d}$				1

Nun ist keine dominante Zeile mehr vorhanden, es kann eine beliebige (die zweite oder die dritte) Spalte markiert werden. Die dritte Zeile wird gestrichen.

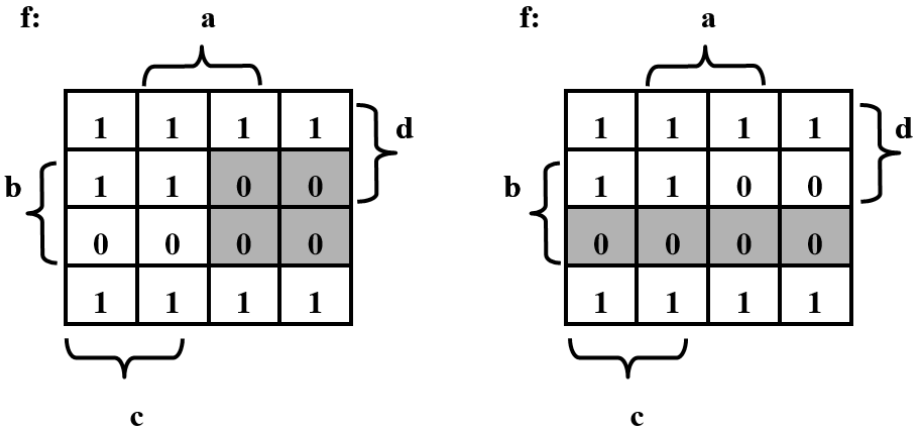
2.4.4 Nutzung von KV-Diagrammen zur Minimierung über Maxterme.

Die im letzten Abschnitt diskutierte Art der Minimierung führt zu einer disjunktiven Minimalform. Man kann KV-Diagramme aber auch nutzen, um eine konjunktive Minimalform zu konstruieren.

Anstelle der Einsen fasst man maximale Blöcke aus Nullen zusammen. Jede Null steht für einen Maxterm. Zusammenfassen von zwei kleinen Blöcken von Nullen zu einem doppelt so großen Block entspricht einer Anwendung der ersten Vereinfachungsregel.

Die Terme der konjunktiven Minimalform werden nun gebildet als Oder-Verknüpfung der **invertierten** Variablen, die die 0-Blöcke im KV-Diagramm überdecken.

Beispiel:



$$f = (c + \bar{b}) \cdot (\bar{b} + d)$$

2.5 Darstellung Boolscher Funktionen mit eingeschränkten Gattertypen

Satz:

Jede Boolesche Funktion kann unter ausschließlicher Verwendung von Invertern, Und-Gattern und Oder-Gattern realisiert werden.

Beweis:

Wie schon früher bewiesen wurde, kann man jede Boolesche Funktion in einer KDNF darstellen. Dabei besteht eine KDNF aus Und- und Oder-Verknüpfungen und Negationen.

Jede Boolesche Funktion kann realisiert werden unter ausschließlicher Verwendung von

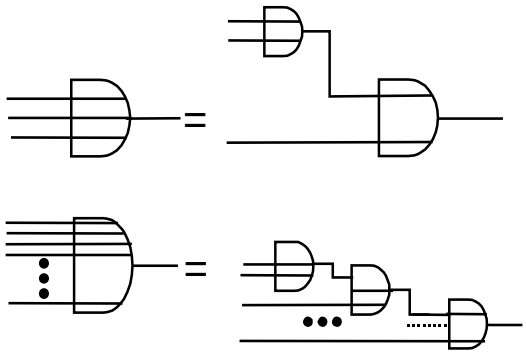
(i) Invertern, Und-Gattern mit zwei Eingängen und Oder-Gattern mit zwei Eingängen.

Beweis:

a) Oder-Gatter: Wiederholte Anwendung der folgenden Gleichung:

$(a_1+a_2+a_3+a_4...a_{k-1}+a_k) = a_1+(a_2+a_3+a_4+...+a_{k-1}+a_k)$

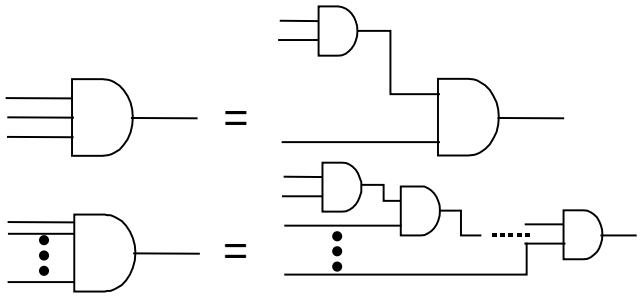
Bild:



b) Und-Gatter: Wiederholte Anwendung der folgenden Gleichung:

$(a_1a_2a_3a_4...a_{k-1}a_k)=a_1(a_2a_3a_4...a_{k-1}a_k)$

Bild:



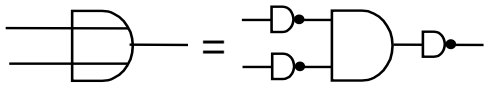
(ii) Invertern und Und-Gattern mit zwei Eingängen.

Beweis: jeder Oder-Gattern kann man mit Hilfe von Und-Gattern und Inverter darstellen.

Nach dem Gesetz von De Morgan gilt:

$$a+b=\overline{\overline{a+b}}=\overline{\bar{a}\,\bar{b}}$$

Bild:

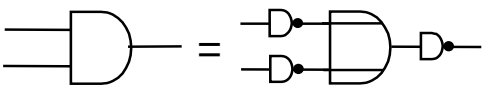


(iii) Invertern und Oder-Gattern mit zwei Eingängen.

Beweis: Jedes Und-Gatter kann man mit Hilfe von Oder-Gattern und Invertern darstellen.

$$ab=\overline{\overline{ab}}=\overline{\bar{a}+\bar{b}}$$

Bild:



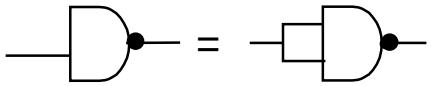
(iv) Nand-Gattern mit zwei Eingängen.

Beweis:

a) Negation:

$a = aa$, also $\overline{a} = \overline{aa}$

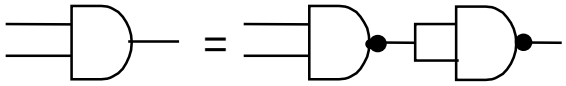
Bild:



b) Und:

$ab = \overline{\overline{ab}} = \overline{\overline{ab}}\,\overline{\overline{ab}}$

Bild:



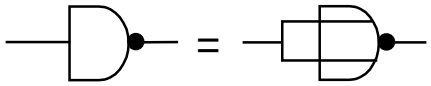
(v) Nor-Gattern mit zwei Eingängen.

Beweis:

a) Negation:

$a = a + a$ also $\overline{a} = \overline{a + a}$

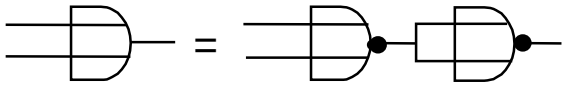
Bild:



b) Oder:

$a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a + b} + \overline{a + b}}$

Bild:



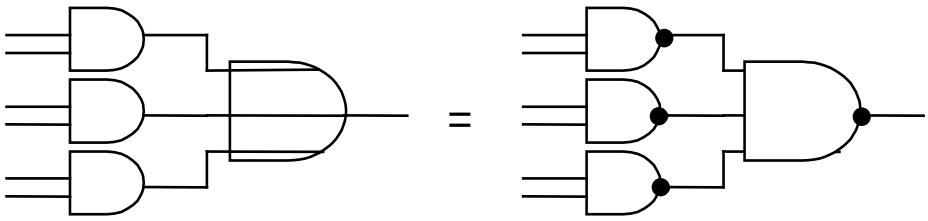
Warum interessiert man sich für so etwas? Weil „Nand“ und „Nor“ in einer Realisierung in CMOS-Technologie billiger sind als „And“ und „Or“.

2.5.1 Normalformen und Minimalformen in Nand- und Nor-Logik

Alle Funktionen, die in der Normalform bzw. in der Minimalform beschrieben sind, kann man mit Nand- Nor-Logik implementieren. Dabei gelten folgende Regeln:

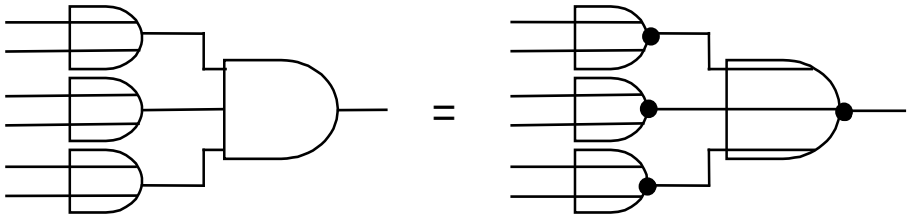
Bei der KDNF werden alle And-Gatter übernommen und invertiert, und aus dem Oder-Gatter wird ein Nand-Gatter, so entsteht Nand-Logik.

Beispiel:



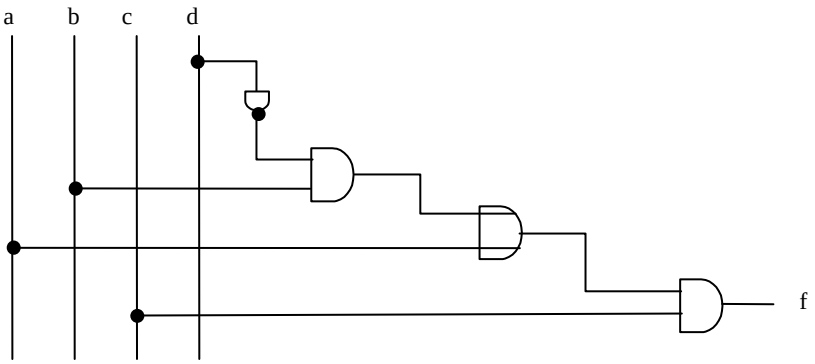
Bei KKNF werden alle Oder-Gatter übernommen und invertiert, und aus And-Gatter wird ein Nor-Gatter, so entsteht Nor-Logik.

Beispiel:



2.5.2 Mehrstufigkeit

Viele Boolsche Funktionen kann man so umformen, dass die Anzahl von Gattern verkleinert wird. Z. B. $f = abc + a\bar{b}c + bc\bar{d} = c(ab + a\bar{b} + b\bar{d}) = c(a + b\bar{d})$. Wir haben jetzt eine mehrstufige Funktion bekommen. Wenn jedes Gatter eine bestimmte Schaltzeit benötigt, ist eine mehrstufige Realisierung langsamer als die zweistufige in DMF oder KDNF, da die Schaltvorgänge nacheinander ausgeführt werden müssen.



2.5.3 Vermaschte Logik

Gelegentlich kommt es vor, dass Schaltnetze mit mehreren Ausgängen so realisiert werden können, dass Terme (z.B. Primterme) in der disjunktiven Verknüpfung mehrerer unterschiedlicher Ausgänge auftauchen. In diesem Fall ergibt sich zusätzlich zur Minimierung die Möglichkeit der Einsparung von Gattern, da diese Terme nicht mehrfach gebildet werden

müssen. Der Ausgang eines Und-Gatters, das einen solchen Term erzeugt, wird einfach mit allen Eingängen der Oder-Gatter verbunden, die diesen Term benötigen.

Beispiel:

$y_0 = x_0 x_1 + x_2$

$y_1 = x_0 x_1 + \overline{x}_2$