Rechnen mit natürlichen B-adischen Zahlen

Es gelten die Rechenregeln wie im Dezimalsystem gelernt:

Seien a,b,c aus der Menge der B-adischen natürlichen Zahlen
Addition: a+b = c
Subtraktion: a-b=c, und $b \leq a$
Multiplikation: a*b=c
Ganzzahlige Division ohne Rest c=a/b = (a div b) und (a mod b)=0
(a div b) ist ganzzahlige Divison mit Abschneiden des Restes
r=(a mod b) ist Modulo-Operation, 0<r<b

Beispiele schriftliche Addition (Rechnung mit Übertrag):

Im Oktalsystem B=8 sind die Zahlen 7351_8 und 642_8 zu addieren:

	7351_8
	$+\ 642_8$
Übertrag	$\underline{11100}$
Ergebnis:	$\underline{10213}_8$

Im Dualsystem sollen 1101000101_2 und 10011010111_2 addiert werden.

	1101000101
	+ 10011010111
Übertrag	$\underline{111110001110}$
Ergebnis	$\underline{100000011100}$

46

Rechnen mit natürlichen B-adischen Zahlen

Beispiel schriftliche Subtraktion (Rechnung mit Übertrag):

Im Hexadezimalsystem sollen CAD_{16} von 1234_{16} subtrahiert werden:

	1 2 3 4	4 – D => Übertrag: 14 - D = 7 (Ü1, Ziffer 7)
	C A D	3 – (A+1) = 3 - B => Übertrag: 13 - B = 8 (Ü1, Ziffer 8)
Übertrag	$\underline{1\ 1\ 1\ 0}$	2 - (C+1) = 2 - D => Übertrag 12 – D = 5 (Ü1, Ziffer 5)
	$\underline{5\ 8\ 7}$	1 – (0+1) = 0, Ende der Rechnung

Merke: Subtraktion ist schwieriger als Addition, immer zum nächsten Übertrag rechnen (daher später Rechnen im B-Komplement)

47

Rechnen mit natürlichen B-adischen Zahlen

Beispiele schriftliche Multiplikation $21D5_{16} * 6_{16}$:

Multiplikation der Zahl $21D5_{16}$ mit der Zahl 6_{16}:

		Kommentare:
	2 1 D 5 * 6	
	1 E	5*6 = 1E
	+ 4 E	D*6 = 4E
	+ 6	1*6 = 6
	+ C	2*6 = C
Übertrag	0 0 0 0	
Ergebnis	C A F E	

Multiplikation direkt im Kopf (Rezept Prof. Schimmler):
6*5 = 1E (E schreib hin, 1 im Sinn), 6*D = 4E (+1 macht F, F schreib hin, 4 im Sinn), 6*1 = 6 (+4 macht A, A schreib hin, 0 im Sinn) und 6*2 = C.

Nützlich: eine Tabelle der Vielfachen i * Multiplikand, hier i*6, in B-adischer Form

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
Dez	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	
Hex	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A	

Rechnen mit natürlichen B-adischen Zahlen

Beispiel schriftliche ganzzahlige Division ohne Rest:
Division der Zahl $6402_8 : 12_8$

Berechne durch schriftliche Division mit B=8:

6402 : 12= 515	
62	5*12 = 62
20	Rest 2, hole nächste Ziffer 0
12	1*12 = 12
62	Rest 6, hole nächste Ziffer 2
62	5*12 = 62
0	Rest 0, Ende der Division

Nützlich: Aufstellen einer Tabelle der Vielfachen des Divisors $i*12_8$

i	1	2	3	4	5	6	7	10
Dez	10	20	30	40	50	60	70	80
octal	12	24	36	50	62	74	106	120

1.3.2 Konvertierung natürlicher Zahlen verschiedener Basen

B-adische Darstellung zur Basis B:

$$n = (b_{N-1}, b_{N-2}, \cdots, b_0)_B = b_{N-1}B^{N-1} + b_{N-2}B^{N-2} + \cdots + b_0$$

Darstellung auch durch wiederholtes Ausklammern (Hornerschema):

$$n = ((\cdots(b_{N-1} \cdot B + b_{N-2}) \cdot B + b_{N-3}) \cdot B \cdots + b_1) \cdot B + b_0$$

=> n kann durch wiederholte Multiplikation mit B gewonnen werden.
Ebenso können die Stellen b_i von n durch wiederholte ganzzahlige Division durch B mit Rest berechnet werden.

$$237_{10} = (2 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 7 = (23) \cdot 10 + 7 = 237$$

$237 : 10 = 23$ Rest 7 (Stelle b_0)

$23 : 10 = 2$ Rest 3 (Stelle b_1)

$2 : 10 = 0$ Rest 2 (Stelle b_2)

es gilt: $q = \left\lfloor \frac{n}{B} \right\rfloor$ = n div B, ganzzahlige Division,

$r = n - q \cdot B$ = n mod B, ganzzahliger Rest (Modulo)

$\Rightarrow n = q \cdot B + r$

50

Verfahren der wiederholten Division mit Rest:

n	:	B	=	q_1	Rest	b_0
q_1	:	B	=	q_2	Rest	b_1
q_2	:	B	=	q_3	Rest	b_2
q_3	:	B	=	q_4	Rest	b_3
q_4	:	B	=	q_5	Rest	b_4
. . .	. . .	. . .				
q_{N-2}	:	B	=	q_{N-1}	Rest	b_{N-2}
q_{N-1}	:	B	=	0	Rest	b_{N-1}

51

Konvertierung natürlicher Zahlen verschiedener Basen

n kann auch in der Basis *B'* dargestellt werden, mit Stellen b'_i:

$$n = (b'_{N-1}, b'_{N-1}, \cdots, b'_0)_{B'} = b'_{N-1}B'^{N-1} + b'_{N-2}B'^{N-2} + \cdots + b'_0$$

$$n = ((\cdots(b'_{N-1} \cdot B' + b'_{N-2}) \cdot B' + b'_{N-3}) \cdot B' \cdots + b'_1) \cdot B' + b'_0$$

=> *n* Konvertierung aus Quellsystem *B* => Zielsystem *B'* durch Division mit *B'* bei Rechnung in *B*

n	:	B'	$= q_1$	*Rest*	b'_0
q_1	:	B'	$= q_2$	*Rest*	b'_1
q_2	:	B'	$= q_3$	*Rest*	b'_2
:		:	:		
q_{N-2}	:	B'	$= q_{N-1}$	*Rest*	b'_{N-2}
q_{N-1}	:	B'	$= 0$	*Rest*	b'_{N-1}

52

Umwandlung von Zahlen zwischen polyadischen Systemen

1. Rechnen im Quellsystem B durch wiederholte Division (wenn Rechnen im Quellsystem einfacher ist): $(x)_B \rightarrow (y)_{B'}$

1. Stelle die Basis B' des Zielsystems im Quellsystem dar.
2. q_0=n (Initialisierung)
3. Wiederhole für aufsteigendes i: $q_{i+1} = q_i$ div B'; $r_i = q_i$ mod B' bis $q_{i+1}=0$.
4. Die r_i sind die B'-adische Darstellung von y

Beispiel: $100_{10} \rightarrow B = 8$

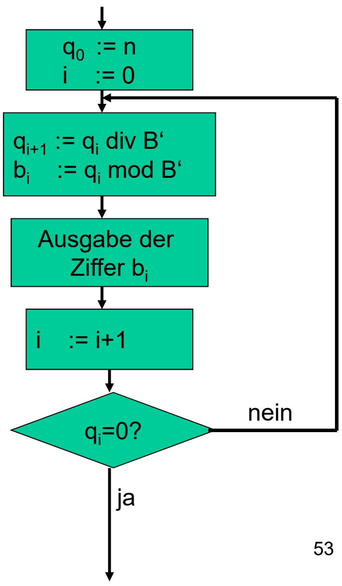
$100 : 8 = 12 \;\; R \;\; 4$

$12 : 8 = 1 \;\; R \;\; 4$

$1 : 8 = 0 \;\; R \;\; 1$

$\Rightarrow 100_{10} = 144_8$

Divisionsmethode



53

Umwandlung von Zahlen zwischen polyadischen Systemen

Rechnen im Zielsystem B‘ durch Abarbeitung des Hornerschemas von links nach rechts, wenn Rechnen im Zielsystem einfacher:

1. Umwandlung aller b_i ins B‘-adische System
2. Umwandlung von B ins B‘-adische System
3. Ausrechnen im B‘-adischen System

n_0

$n_i = n_{i+1} B + b_i$

n_{N-1}

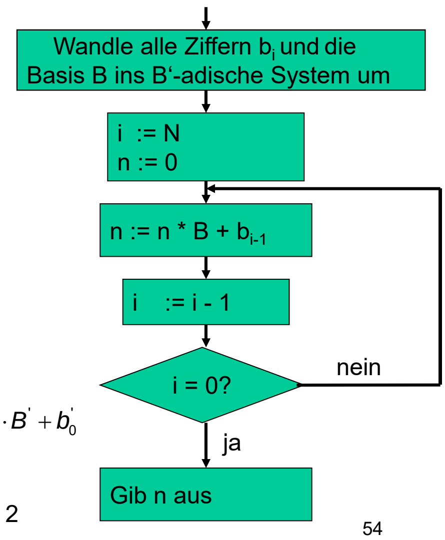
$$n = ((\cdots(b'_{N-1} \cdot B' + b'_{N-2}) \cdot B' + b'_{N-3}) \cdot B' \cdots + b'_1) \cdot B' + b'_0$$

Beispiel: 1442_8, $B = 8 \rightarrow B' = 10$,

$((1 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 2 = (12 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 2$

$= 100 \cdot 8 + 2 = 802_{10}$

Multiplikationsmethode



Umwandlung von Zahlen zwischen polyadischen Systemen, deren Basen Zweierpotenzen sind

1. Umwandlung aller Ziffern ins Binärsystem
2. Wandle die Quellzahl ziffernweise in eine Binärzahl um
3. Fasse geeignete Bits zusammen (LSB-first) für jeweils eine Ziffer im Zielsystem.
4. Erzeuge so die Ziffern im Zielsystem.

(LSB least significant bit, also LSB-first heißt: man beginnt mit dem geringwertigsten Bit)

Dezimal:	$2873_{10} = 101100111001_2$	12 Bit
oktal:	5471_8 = 101 100 111 001	4 x 3 Bit
Hexadez:	$B39_{16}$ = 1011 0011 1001	3 x 4 Bit

1.3.3 Darstellung von ganzen Zahlen, negative Zahlen

Definition B-Komplement einer Zahl:

Sei n eine natürliche Zahl, dargestellt als N-stellige B-adische Zahl. Das B-Komplement von n ist die N-stellige B-adische Zahl gebildet aus den letzten N Ziffern von B^N-n. Das B-Komplement wird interpretiert als (-n)

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i B^i$$

$$-n = B^N - \sum_{i=0}^{N-1} b_i B^i = \sum_{i=0}^{N-1} (B-1-b_i)B^i + 1$$

$$N = 3: -n = B^3 - (b_2B^2 + b_1B + b_0) \quad + (B^2 - B^2) + (B - B)$$
$$= B^3 - B^2 - b_2B^2 + B^2 - B - b_1B + B - 1 - b_0 + 1$$
$$= (B^3 - B^2 - b_2B^2) + (B^2 - B - b_1B) + (B - 1 - b_0) + 1$$
$$= (B-1-b_2)B^2 + (B-1-b_1)B + (B-1-b_0) + 1$$

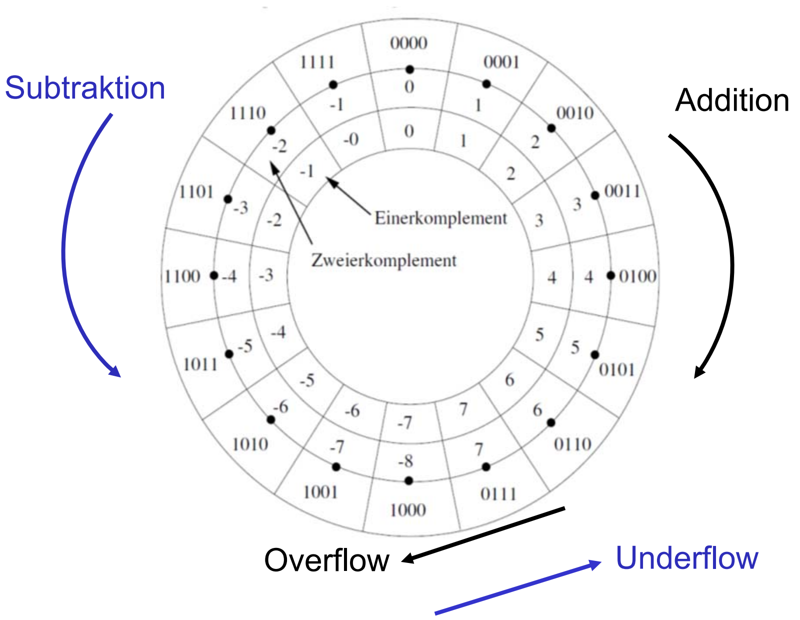
56

4-stellige Zweierkomplement-zahlen

Dezimal 10-adisch	Binär 2-adisch
-8	1000
-7	1001
-6	1010
-5	1011
-4	1100
-3	1101
-2	1110
-1	1111
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

57

Zahlenkreis vierstellige Binärzahlen



58

Darstellbarer Bereich N-stelliger B-adischer Zahlen im B-Komplement für gerades B

$$\{-(B/2)B^{N-1},....,+(B/2)B^{N-1}-1\}$$

Genau die Zahlen, deren MSB (Stelle N-1) mit einer Ziffer $b_{N-1} \geq B/2$ beginnen, sind negativ (entspricht Vorzeichen).
Für B=2 gilt: Stelle b_{N-1} (MSB)= V (Vorzeichenstelle)
V=0=> 0 oder positive Zahl, V=1 => negative Zahl

4-stellige Binärzahl: $n = 0111_2 = 7_{10}$ $\quad b_3 = 0 : V = 0$

$$-n = 1000_2 + 1_2 = 1001_2 = -7_{10} \quad b_3 = 1 : V = 1$$

Addition von positiven Zahlen mit Bereichsüberschreitung:
0100+0100=1000 (4+4 = -8 falsch, richtig wäre 8)

Subtraktion von negativen Zahlen mit Bereichsunterschreitung:
1100+1010=1|0110 (-4 -5 = 6 falsch, richtig wäre -9)

59

Satz: Genau dann ist bei Addition zweier N-stelliger 2-adischer Zahlen das Ergebnis wieder im (mit N Stellen) darstellbaren Bereich, wenn bei der Summe nach der Addition die Vorzeichenstelle (V, Stelle N-1) mit der Sicherungsstelle (S, Stelle N) übereinstimmt.

Die Sicherungsstelle N erlaubt Erkennung von Bereichsfehlern (-16,15)

N=5:	S	V	2^3	2^2	2^1	2^0		
kopiere $V \rightarrow S$	0	0	1	0	1	1	$= 11_{10}$	
	0	0	1	0	1	0	$= +10_{10}$	
	0	1	0	1	0	1	$= -11_{10}$	Fehler, richtig wäre +21

vergleiche $S \neq V$

Korrekte Berechnung, wenn S = V:

N=5:	S	V	2^3	2^2	2^1	2^0		
kopiere $V \rightarrow S$	0	0	1	0	1	0	$= 10_{10}$	
	1	1	0	1	0	1	$= -11_{10}$	
	1	1	1	1	1	1	$= -1_{10}$	Korrekt, S=V

vergleiche $S = V$

60

1.3.4 Darstellung rationaler Zahlen im Festpunktformat

$$n = \sum_{i=-M}^{N-1} b_i B^i$$
$$= b_{N-1}B^{N-1} + b_{N-2}B^{N-2} + \cdots b_1 B^1 + b_0$$
$$+ b_{-1}B^{-1} + b_{-2}B^{-2} + \cdots + b_{-M+1}B^{-M+1} + b_{-M}B^{-M}$$

Darstellbarer Bereich (bei geradem B):
$[-(B/2)*B^{N-1}..+(B/2)*B^{N-1}-B^{-M}]$

Bei einer Wortlänge L=N+M gilt:
N Vorkommastellen, M Nachkommastellen (Feste Kommastelle)

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i B^i . \sum_{i=-M}^{-1} b_i B^i$$

$$n_2 = 1010.011 = (2^3 + 2^1) + (2^{-2} + 2^{-3}) = 10.\tfrac{3}{8}$$

mit L=N+M=7,M=3

61

Darstellung rationaler Zahlen im Festpunktformat

Beispiele für die Darstellung einer gegebenen rationalen L-stelligen Zahl n mit M Nachkommastellen

n= 16.1/8 = 16.125_{10} in unterschiedlichen Basen:

B = 10; L = 5 ; M = 3 : n = 16.125_{10}
B = 2; L = 8 ; M = 3 : n = 10000.001_{2}
B = 8; L = 3 ; M = 1 : n = 20.1_{8}
B = 16; L = 3 ; M = 1 : n = 10.2_{16}

62

Hornerschema für Brüche (Nachkommastellen)

$$n = \sum_{i=-M}^{-1} b_i * B^i$$

$$= b_{-1}B^{-1} + b_{-2}B^{-2} + \ldots + b_{-M+1}B^{-M+1} + b_{-M}B^{-M}$$

$$= ((..(b_{-M}B^{-1} + b_{-M+1})*B^{-1} + b_{-M+2})*B^{-1} \ldots + b_{-1})*B^{-1}$$

=> Vom LSB b_{-M} zum MSB b_{-1} ausklammern

63

Hornerschema für Brüche (Nachkommastellen)

Die Umkehrung der Divisionsmethode ergibt ein einfaches Verfahren zur Konvertierung b-adischer Nachkommazahlen:

- Der ganzzahlige Teil der Zahl wird unabhängig vom Nachkomma-Teil konvertiert (z.B. Divisionsmethode).
- Der Nachkommateil der Zahl wird konvertiert, indem folgende Schritte iterativ ausgeführt werden:

1. Multiplikation des Nachkommateils mit der Zielbasis
2. Auslesen des hierdurch entstehenden ganzzahligen Zahlteils und Verwendung als Ziffer im Zielcode (in direkter Reihenfolge)

Das Verfahren terminiert, wenn der Nachkommateil Null ergibt.

64

Multiplikationsmethode für Brüche (Nachkommastellen)

$$n_{10} = \frac{5}{16} = 0.3125 \rightarrow B = 2 \qquad q_0 = n, \qquad r_0 = \lfloor n \rfloor = 0$$

$$q_1 = (q_0 - r_0) * B = (0.3125 - 0) * 2 = 0.625 \qquad r_1 = \lfloor q_1 \rfloor = 0$$

$$q_2 = (q_1 - r_1) * B = (0.625 - 0) * 2 = 1.25 \qquad r_2 = \lfloor q_2 \rfloor = 1$$

$$q_3 = (q_2 - r_2) * B = (1.25 - 1) * 2 = 0.5 \qquad r_3 = \lfloor q_2 \rfloor = 0$$

$$q_4 = (q_3 - r_3) * B = (0.5 - 0) * 2 = 1.0 \qquad r_4 = \lfloor q_3 \rfloor = 1$$

$q_5 = 0$ Konvertierung terminiert

$$\mathrm{n}_2 = r_0.r_1r_2r_3r_4 = 0.0101_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

r_i = i-te Nachkommastelle in der Zielbasis, hier B=2
Durch die Multiplikation mit B wird die Zahl n links verschoben

65

1.3.5 Gleitkommazahlen (floating point numbers)

Vorzeichenbehaftete Exponentialdarstellung:

$$x = \pm M \cdot B^{\pm e}, 0 \leq M < 1$$

x = V * 0,Mantisse * 2^{Exponent}

Dabei ist V = +1 wenn das Vorzeichen + ist
und V = -1, wenn das Vorzeichen – ist.
Der Bereich darstellbarer Zahlen bei m Mantissenbits und e Exponentenbits ist

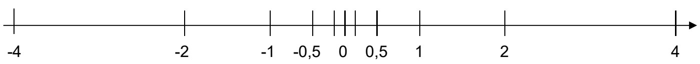
$$\left[-(1-2^{-m}) \cdot 2^{2^{e-1}-1}, \cdots, +(1-2^{-m}) \cdot 2^{2^{e-1}-1}\right]$$

Die Mantisse wird auf die Form $0{,}1xx_2$ normalisiert. Dadurch gilt $\frac{1}{B} \leq M < 1$

66

Gleitkommazahlen (floating point numbers)

Gleitkommazahlen haben den Vorteil, dass sie einen viel größeren Zahlenbereich abdecken als gleichlange Festkommazahlen. Die Verteilung der Zahlen ist allerdings nicht-linear.
In der Nähe der 0 bieten Sie eine wesentlich höhere Genauigkeit, dafür reduziert sich diese bei großen Zahlen => Probleme mit Rundung!



Qualitative Verteilung von Gleitkommazahlen

67

Multiplikation von Gleitkommazahlen

$N_1 = V_1 * 0,M_1 * 2^{E1}$, $N_2 = V_2 * 0,M_2 * 2^{E2}$

$N_1 * N_2 = (V_1 * V_2) * 0,(M_1 * M_2) * 2^{E1+E2}$

Korrektur von Mantisse und Exponent derart, dass führende Nullen hinter dem Komma verschwinden (Normalisierung).

68

Addition von Gleitkommazahlen

$N_1 = V_1 * 0,M_1 * 2^{E1}$, $N_2 = V_2 * 0,M_2 * 2^{E2}$

1. Exponentendifferenz berechnen (z.B. E1>E2). d=E1-E2
2. Verschieben der Mantisse M_2 um d Stellen nach rechts. $M'_2 = M_2$ >> d Stellen
3. Addition der Mantissen M_1 und M'_2
4. Berechnung des Vorzeichens des Ergebnisses
5. Normalisierung

$N_1 + N_2 = (V) * 0,(M_1 + M'_2) * 2^{E1}$

69

IEEE 754 Format 32-Bit (float, single)

1 Vorzeichenbit
8 Exponentenbits (MSB first)
23 Mantissenbits (MSB first), normalisiert, 1. Bit gespart

Der Wert w eine solchen Zahl berechnet sich als:

$w = (-1)^V*(1,M)*2^{E-127}$,	falls E>0 und E<255	(Standard)
$w = (-1)^V*(0,M)*2^{-126}$,	falls E=0 und M≠0	(sehr klein)
$w = (-1)^V*0$,	falls E=0 und M=0	(Nullwert)
$w = (-1)^V*\text{Infinity}\ (\infty)$,	falls E=255 und M=0	(> Bereich)
w = NaN (Not a number),	falls E=255 und M≠0	(Fehler)

Darstellbarer Bereich ca $[-10^{38}..+10^{38}]$

70

Zahlenbereiche, „Löcher“ im 32-Bit Format

Actual Exponent (unbiased)	Exp (biased)	Minimum	Maximum	Gap
0	127	1	≈ 1.999999880791	≈ 1.19209e-7
1	128	2	≈ 3.999999761581	≈ 2.38419e-7
2	129	4	≈ 7.999999523163	≈ 4.76837e-7
10	137	1024	≈ 2047.999877930	≈ 1.22070e-4
11	138	2048	≈ 4095.999755859	≈ 2.44141e-4
23	150	8388608	16777215	1
24	151	16777216	33554430	2
127	254	≈ 1.70141e38	≈ 3.40282e38	≈ 2.02824e31

71

IEEE 754 Format 64-Bit (double)

1 Vorzeichenbit
11 Exponentenbits (MSB first)
52 Mantissenbits (MSB first)

Der Wert w eine solchen Zahl berechnet sich als:

$w = (-1)^V*(1,M)*2^{E-1023}$,	falls E>0 und E<2047
$w = (-1)^V*(0,M)*2^{-1022}$,	falls E=0 und M≠0
$w = (-1)^V*0$,	falls E=0 und M=0
$w = (-1)^V*\text{Infinity}\ (\infty)$,	falls E=2047 und M=0
w = NaN (Not a number),	falls E=2047 und M≠0

Darstellbarer Bereich ca $[-10^{300}..+10^{300}]$

72

IEEE 754 Format 80-Bit (extended)

1 Vorzeichenbit
15 Exponentenbits (MSB first)
64 Mantissenbits (MSB first)

Der Wert w eine solchen Zahl berechnet sich als:

$w = (-1)^V*(0,M)*2^{E-16383}$,	falls E>0 und E<32767
$w = (-1)^V*\text{Infinity}\ (\infty)$,	falls E=32767 und M=0
w = NaN (Not a number),	falls E=32767 und M≠0

Darstellbarer Bereich ca $[-10^{5000}..+10^{5000}]$

73

1.3.6 Zeichencodes

EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code)

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
		0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	0000																
1	0001																
2	0010																
3	0011																
4	0100	blank										§	.	<	(	+	|
5	0101	&										!	$	•	)	;	
6	0110	-	/									^	,	%		>	?
7	0111											:	#	@	‘	*	“
8	1000		a	b	c	d	e	f	g	h	i						
9	1001		j	k	l	m	n	o	p	q	r						
A	1010			s	t	u	v	w	x	y	z						
B	1011																
C	1100		A	B	C	D	E	F	G	H	I						
D	1101		J	K	L	M	N	O	P	Q	R						
E	1110			S	T	U	V	W	X	Y	Z						
F	1111	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						

1.3.6 Zeichencodes

ASCII (American Standard Code for Information Interchange)

		000	001	010	011	100	101	110	111
0	0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	‘	p
1	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	0010	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
3	0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
8	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	1001	SKIP	EM	)	9	I	Y	i	y
A	1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	1110	SO	HOME	.	>	N	^	n	~
F	1111	SI	NL	/	?	O	_	o	DEL