2. Grundlagen digitaler Schaltungen

2.1 Boole‘sche Funktionen

– Darstellung Boolescher Funktionen

2.2 Boole‘sche Algebra

– Sätze der Booleschen Algebra

2.3 Realisierung von Booleschen Funktionen

– Normalformen zweistufiger Netzwerke
– Minimalformen

2.4 Minimierung von Booleschen Funktionen

– Algebraische Umformung
– KV-Diagramme
– Minimierung nach Quine-McCluskey

2.5 Verwendung eingeschänkter Gattertypen

– NAND und NOR-Logik
– Normalformen in NAND und NOR

1

2.1 Boole‘sche Funktionen

Definition:

Sei B={0,1} und n und m natürliche Zahlen. Eine Funktion

f: $B^n \rightarrow B^m$ heißt Boole'sche Funktion

(Benannt nach dem Mathematiker George Boole, 1815-1864)
Achtung: hier stellt B keine Basis eines Zahlensystems dar und B^n,B^m sind keine Potenzen sondern kennzeichnen die Anzahl (Dimension) der Variablen

2

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Definition:

Die Wertetabelle einer Boole‘schen Funktion beschreibt die Werte der Ausgangsvariablen für jede mögliche Kombination der Eingabevariablen. Sie stellt eine vollständige und eindeutige Beschreibung der Funktion dar.

3

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktion mit einer Variablen x (n=1) und einem Ausgang y:

	x=0	x=1	Algebraische Darstellung
Nullfunktion	y=0	y=0	y=0
Identität	y=0	y=1	y=x
Negation	y=1	y=0	$y=\bar{x}$
Einsfunktion	y=1	y=1	y=1

Es gibt $2^{2^n} = 2^{2^1} = 4$ Kombinationen bei n=1

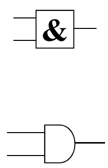
4

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen
(n=2, 16 Kombinationen):

1. UND-Funktion

AND



x_0	x_1	$x_0 \wedge x_1$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$x_0 \wedge x_1 = x_0 \cdot x_1 = x_0 x_1$$

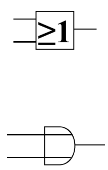
X_0 UND X_1 (äquivalente Schreibweisen)

5

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
2. ODER-Funktion

OR



x_0	x_1	$x_0 \vee x_1$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$x_0 \vee x_1 = x_0 + x_1$$

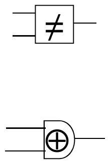
X_0 ODER X_1 (äquivalente Schreibweisen)

6

Darstellung Boole'scher Funktionen

Boole'sche Funktionen mit zwei Variablen:
3. Exklusives Oder

XOR



x_0	x_1	$x_0 \oplus x_1$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

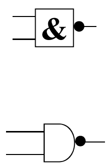
$$x_0 \oplus x_1$$

7

Darstellung Boole'scher Funktionen

Boole'sche Funktionen mit zwei Variablen:
4. NAND-Funktion, Sheffer-Funktion

NAND



x_0	x_1	$\overline{x_0 \wedge x_1}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

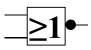
$$\overline{x_0 \wedge x_1} = \overline{x_0 \cdot x_1} = \overline{x_0 x_1}$$

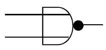
8

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
5. NOR-Funktion, Pierce-Funktion

NOR





x_0	x_1	$\overline{x_0 \vee x_1}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

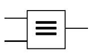
$$\overline{x_0 \vee x_1} = \overline{x_0 + x_1}$$

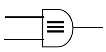
9

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
6. Äquivalenzfunktion

EQV





x_0	x_1	$x_0 \equiv x_1$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

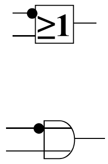
$$x_0 \equiv x_1 = x_0 \Leftrightarrow x_1$$

10

Darstellung Boole'scher Funktionen

Boole'sche Funktionen mit zwei Variablen:
7. Implikation

IMP



x_0	x_1	$x_0 \Rightarrow x_1$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

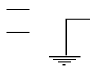
$$x_0 \Rightarrow x_1 = \overline{x_0} + x_1$$

11

Darstellung Boole'scher Funktionen

Boole'sche Funktionen mit zwei Variablen:
8. Nullfunktion

0



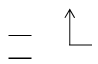
x_0	x_1	Null
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

12

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
9. Einsfunktion

1

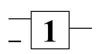


x_0	x_1	Eins
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
10. Identität für x_0

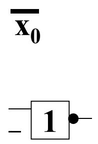
$\mathbf{x_0}$



x_0	x_1	x_0
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:
11. Negation für x_0



x_0	x_1	$\overline{x_0}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

15

Darstellung Boole‘scher Funktionen

Boole‘sche Funktionen mit zwei Variablen:

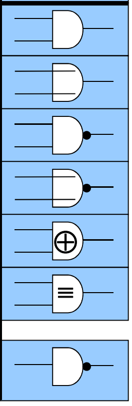
12 – 16 Weitere Funktionen, z.B. Identität für $x_{1,}$

16

Darstellung Boole'scher Funktionen

Die wichtigsten Funktionen mit zwei Variablen:

	Formel	Symbol	Altes Symbol
UND (AND)	$x_0 \wedge x_1$	&	
ODER (OR)	$x_0 \vee x_1$	≥1	
NAND	$\overline{x_0 \wedge x_1}$	&	
NOR	$\overline{x_0 \vee x_1}$	≥1	
XOR	$x_0 \oplus x_1$	≠	
EQV	$x_0 \equiv x_1$	=	
NOT x_0	$\overline{x_0}$	1	



17

2.2 Boole'sche Algebra

Definition:

Eine Boole'sche Algebra ist eine algebraische Struktur (A,+,•), wobei A eine Menge ist und + und • zweistellige Verknüpfungen auf dieser Menge. Beide Verknüpfungen müssen kommutativ sein. Es gibt neutrale Elemente für + und •. Es gelten beide Distributivgesetze. Für jedes Element gibt es ein inverses Element bezüglich beider Verknüpfungen.

18

Axiome der Boole'schen Algebra:

1. Kommutativgesetze:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 + x_1 = x_1 + x_0$$
$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0$$

2. Neutrale Elemente:

$$\exists 0 \in A: \forall x \in A: 0 + x = x$$
$$\exists 1 \in A: \forall x \in A: 1 \cdot x = x$$

3. Distributivgesetze:

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 + x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$$
$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 \cdot x_1) + x_2 = (x_0 + x_2) \cdot (x_1 + x_2)$$

4. Inverses Element:

$$\forall x \in A \exists \overline{x} \in A: x + \overline{x} = 1 \; und \; x\overline{x} = 0$$

Aus diesen vier Axiomen lassen sich eine Reihe von Aussagen ableiten

19

Behauptung: Das inverse Element ist eindeutig.
Beweis:

Sei x Eingabevariable. Seien x_1, x_2 inverse Elemente zu x.

$$x_1 = x_1 \cdot 1 + 0 = x_1 \cdot (x_2 + x) + x_2 \cdot x = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x \; + x_2 \cdot x = x_1 \cdot x_2 + 0 + x_2 \cdot x$$
$$= x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x = x_2 \cdot (x_1 + x) = x_2 \cdot 1 = x_2$$

Das inverse Element zu x ist also eindeutig.

20

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 1: $\forall x \in A : x + 1 = 1$

Satz 2: $\forall x \in A : x \cdot 0 = 0$

Satz 3: $\forall x \in A : x + x = x$

Satz 4: $\forall x \in A : x \cdot x = x$

21

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 1:

$$\forall x \in A : x + 1 = 1$$

Beweis:

$$x + 1 \overset{A2}{=} 1 \cdot (x + 1) \overset{A4}{=} (x + \overline{x}) \cdot (x + 1) \overset{2xA1}{=} (\overline{x} + x) \cdot (1 + x) \overset{A3}{=}$$
$$(\overline{x} \cdot 1) + x \overset{A2}{=} \overline{x} + x \overset{A4}{=} 1$$

22

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 4:

$$\forall x \in A : x \cdot x = x$$

Beweis:

$$x \cdot x = (0 + x) \cdot (0 + x) = (0 \cdot 0) + x = 0 + x = x$$

23

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 5 (Assoziativgesetz für ·):

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A : (x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)$$

Satz 6 (Assoziativgesetz für +):

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A : (x_0 + x_1) + x_2 = x_0 + (x_1 + x_2)$$

24

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 7:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 + x_0 x_1 = x_0$$

Beweis:

$$x_0 + x_0 \cdot x_1 \overset{A2}{=} x_0 \cdot 1 + x_0 \cdot x_1 \overset{A4}{=}$$
$$x_0 \cdot (\overline{x_1} + x_1) + x_0 \cdot x_1 \overset{A1,A3}{=}$$
$$(x_0 \cdot \overline{x_1} + x_0 \cdot x_1) + x_0 \cdot x_1 \overset{S6}{=}$$
$$x_0 \cdot \overline{x_1} + (x_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot x_1) \overset{S3}{=}$$
$$x_0 \cdot \overline{x_1} + x_0 \cdot x_1 \overset{A3}{=} x_0 \cdot (\overline{x_1} + x_1) \overset{A4}{=}$$
$$x_0 \cdot 1 \overset{A2}{=} x_0$$

Sätze der Boole'schen Algebra:

Satz 8:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 \cdot (x_0 + x_1) = x_0$$

Satz 9:

$$\forall x: \overline{\overline{x}} = x$$

Satz 10:

$$\overline{0} = 1 \quad und \quad \overline{1} = 0$$

Satz 11 (Erste Regel von deMorgan):

$$\forall x_0, x_1 \in A: \overline{x_0} + \overline{x_1} = \overline{x_0 \cdot x_1}$$

Satz 12 (Zweite Regel von deMorgan):

$$\forall x_0, x_1 \in A: \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0 + x_1}$$

Sätze der Boole‘schen Algebra:

Satz 13 (Erste Vereinfachungsregel):

$$\forall x_0, x_1 \in A : (x_0 + x_1) \cdot (x_0 + \overline{x_1}) = x_0$$

Satz 14 (Zweite Vereinfachungsregel):

$$\forall x_0, x_1 \in A : (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) = x_0$$

27

2.3 Realisierung von Boole‘schen Funktionen

Definition:

Die funktionale Beschreibung einer Boole‘schen Funktion ist eine abstrakte Darstellung des Ein-Ausgabe-Verhaltens einer diese Funktion realisierenden Schaltung.

28

Funktionale Beschreibung eines Volladdierers:

```
Volladdierer
Eingänge: x2, x1, x0
Ausgänge: y1, y0
Verhalten: Wenn eine ungerade
Anzahl von Eingängen 1 ist, hat y0
den Wert 1; sonst ist y0 gleich 0.
Wenn zwei oder mehr Eingänge den
Wert 1 haben, hat y1 den Wert 1;
sonst ist y1 gleich 0.
```

29

Wertetabelle für den Volladdierer:

Volladdierer Stufe i:

$$\begin{array}{lll} & x_{0,i} & \text{Summand 1} \\ + & x_{1,i} & \text{Summand 2} \\ + & C_{i-1} & \text{Carry-Übertrag} \\ \hline = C_i & y_{0,i} & \text{Ergebnis} \end{array}$$

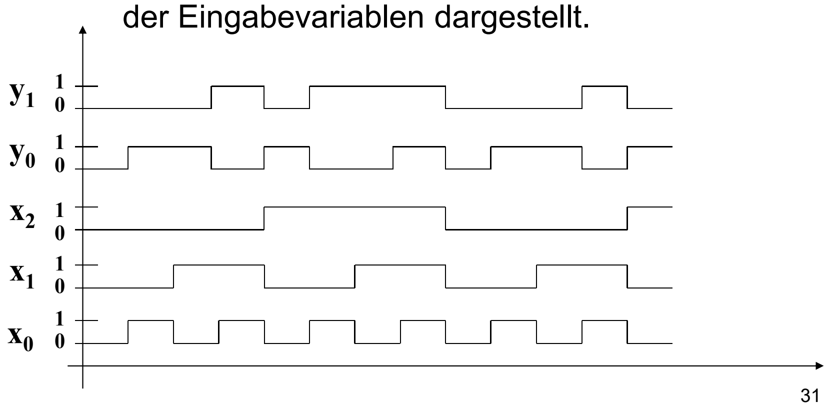
Eingabevariablen			Ausgabevariablen	
C_{i-1}: x_2	x_1	x_0	C_i: y_1	y_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

1 Bit Addierer mit Übertrag der Stelle i:
- Übertrag aus Stufe i-1speichern : $x_{2i}=y_{1(i-1)}=C_{(i-1)}$
- Schaltnetz zur Berechnung mit Übertrag $(y_1y_0)=x_0+x_1+x_2$

30

Impulsdiagramm des Volladdierers:

Mit einem Impulsdiagramm wird das Verhalten einer Boole'schen Funktion in Form von Veränderungen einer fiktiven physikalischen Größe (die die Werte der Ausgabevariablen symbolisiert) in Abhängigkeit von den Werten der Eingabevariablen dargestellt.



31

Funktionsgleichungen des Volladdierers:

Die Beschreibung einer Boole'schen Funktion als Menge von Funktionsgleichungen ist eine vollständige Beschreibung der Funktion. Für jede Ausgabevariable muss eine Funktionsgleichung vorhanden sein, auf deren rechter Seite nur Eingabevariablen auftauchen.

$$y_0 = \overline{x}_0\overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 \overline{x}_1 \overline{x}_2 + x_0 x_1 x_2$$

$$y_1 = \overline{x}_0 x_1 x_2 + x_0 \overline{x}_1 x_2 + x_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 x_1 x_2$$

32

Schaltbild (Schaltnetz) des Volladdierers:

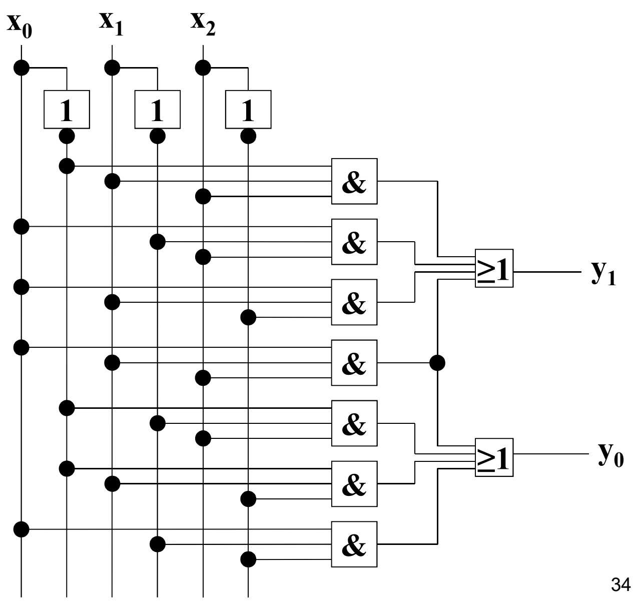
Definition:

Die Beschreibung einer Boole‘schen Funktion als Schaltbild ist eine Darstellung der Funktion, die auf eine technische Realisierung unter einer gegebenen Schaltungstechnologie abzielt. Sie ist vollständig aber nicht eindeutig.

Ein Schaltnetz ist eine technische Realisierung einer Boole‘schen Funktion. Schaltnetze können durch Zusammenschalten von Gattern und Leitungen aufgebaut werden.

33

Zweistufiges Schaltnetz des Volladdierers:



34

2.4 Normalformen zweistufiger Schaltnetze

Realisierungen von Boole‘sche Funktionen können über (disjunktive und konjunktive) Normalformen beschreiben werden.

Definition: Ein Produktterm ist eine UND-Verknüpfung von Eingabevariablen, wobei jede Eingabevariable höchstens einmal in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen kann.

Beispiele für Produktterme (Schreibweisen):

$$x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x}_2 \qquad \overline{x}_0 \qquad \overline{x}_0 \cdot x_2 \qquad x_4 x_2$$

35

Disjunktive Normalform

Definition: Ein Boole‘sche Funktion ist in Disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie aus einer ODER-Verknüpfung von Produkttermen besteht.

Beispiele für Funktionen in DNF:

$$x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_0 + \overline{x}_0 x_2 + x_4 x_2$$

$$x_0 \overline{x}_2 + \overline{x}_0$$

36

Minterme

Definition: Ein Minterm (Vollkonjunktion, Minimaler Produktterm) ist ein Produktterm, bei dem alle Eingabevariablen entweder in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen. Ein Minterm entspricht einer Zeile in der Wertetabelle der Funktion.

Beispiele für Minterme mit 3 (links) und 1 (rechts) Variablen:

$x_0 x_1 \overline{x}_2 \qquad \overline{x}_0$

$x_0 \overline{x}_2$ hingegen ist kein Minterm, wenn es auch noch eine Eingabevariable x_1 gibt.

37

Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF)

Definition: Die Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF) einer Boole'schen Funktion ist eine ODER-Verknüpfung aller Minterme, für die die Funktion den Wert 1 annimmt.

Beispiele für Funktionen in KDNF (3 Variablen):

$$x_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2$$

$\overline{x}_0$ (1 Variablen)

Die folgende Funktion ist nicht in KDNF:

$$x_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 x_2 + \overline{x}_0 x_1 x_2$$

im zweiten Produktterm taucht das x_1 nicht auf, daher ist es kein Minterm. Erweiterung zur KDNF durch Einfügen:

$$x_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 x_2 (x_1 + \overline{x}_1) + \overline{x}_0 x_1 x_2$$

$$= x_0 x_1 \overline{x}_2 + x_0 x_2 x_1 + x_0 x_2 \overline{x}_1 + \overline{x}_0 x_1 x_2$$

38

Wertetabelle mit Mintermen und KDNF

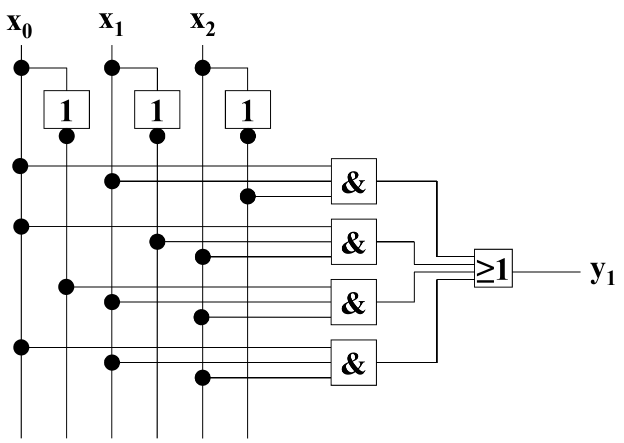
x_2	x_1	x_0	y_1	Minterm
0	0	0	0	$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
0	0	1	0	$x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
0	1	0	0	$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}$
0	1	1	1	$x_0\,x_1\,\overline{x_2}$
1	0	0	0	$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,x_2$
1	0	1	1	$x_0\,\overline{x_1}\,x_2$
1	1	0	1	$\overline{x_0}\,x_1\,x_2$
1	1	1	1	$x_0\,x_1\,x_2$

Die grün unterlegten Minterme (y_1=1) formen die KDNF (Berechnung des Carry-Übertrags beim Volladdierer)

$$x_0x_1\overline{x}_2 + x_0\overline{x}_1x_2 + \overline{x}_0x_1x_2 + x_0x_1x_2$$

39

Schaltbildes von y_1 in KDNF:



40