Summenterme (konjunktive Form)

Definition:

Ein Summenterm ist eine ODER-Verknüpfung von Eingabevariablen, wobei jede Eingabevariable höchstens einmal in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen kann.

Beispiele für Summenterme:

$x_0 + x_1 + \overline{x}_2 \qquad \overline{x}_0 \qquad \overline{x}_0 + x_2 \qquad x_4 + x_2$

41

Konjunktive Normalform

Definition: Ein Boole'sche Funktion ist in Konjunktiver Normalform (KNF), wenn sie aus einer UND-Verknüpfung von Summentermen besteht.

Beispiele für Funktionen in KNF:

$$\overline{x_0}$$

$$x_0 \cdot (x_2 + x_0)$$

$$(\overline{x_4} + \overline{x_2}) x_1 (\overline{x_3} + x_2)(x_0 + x_4)$$

42

Maxterme

Definition: Ein Maxterm (Volldisjunktion) ist ein Summenterm, bei dem alle Eingabevariablen entweder in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen. Es gibt für jede Zeile i in einer Wertetabelle der Funktion einen Maxterm, der der Menge aller Zeilen außer seiner Zeile i entspricht. Als Eingabe dienen die invertierten Eingabevariablen

Beispiele für Maxterme:

$$x_0 + x_1 + \overline{x}_2 \qquad \overline{x}_0$$

$x_0 + \overline{x}_2$ hingegen ist kein Maxterm, wenn es auch noch eine Eingabevariable x_1 gibt.

Kanonische Konjunktive Normalform (KKNF)

Definition: Die Kanonische Konjunktive Normalform (KKNF) einer Boole'schen Funktion ist eine UND-Verknüpfung aller Maxterme, für deren Zeile die Funktion den Wert 0 annimmt.

Beispiele für Funktionen in KKNF (3 Variablen):

$$(x_0 + x_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_0 + x_1 + x_2) \cdot (x_0 + \overline{x}_1 + x_2)$$

$\overline{x_0}$ (1 Variable)

Die folgende Funktion ist nicht in KKNF:

$$x_0 \cdot (x_0 + \overline{x}_1 + x_2)$$

im ersten Summenterm tauchen x_1 und x_2 nicht auf, daher ist es kein Maxterm.

Wertetabelle mit Maxtermen und KKNF

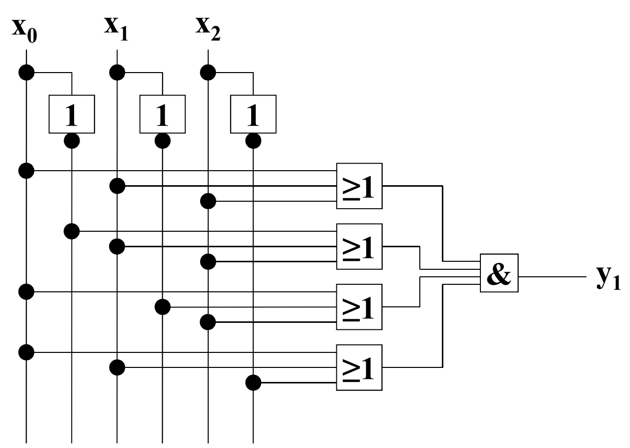
x_2	x_1	x_0	y_1	Maxterm
0	0	0	0	$x_0 + x_1 + x_2$
0	0	1	0	$\overline{x}_0 + x_1 + x_2$
0	1	0	0	$x_0 + \overline{x}_1 + x_2$
0	1	1	1	$\overline{x}_0 + \overline{x}_1 + x_2$
1	0	0	0	$x_0 + x_1 + \overline{x}_2$
1	0	1	1	$\overline{x}_0 + x_1 + \overline{x}_2$
1	1	0	1	$x_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2$
1	1	1	1	$\overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2$

Die grün unterlegten Maxterme (y_1=0) formen die KKNF
(Berechnung des Carry-Übertrags beim Volladdierer)

$$(x_0 + x_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_0 + x_1 + x_2) \cdot (x_0 + \overline{x}_1 + x_2) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x}_2)$$

45

Schaltbildes von y_1 in KKNF:



46

Vergleich Minterme (links) und Maxterme (rechts)

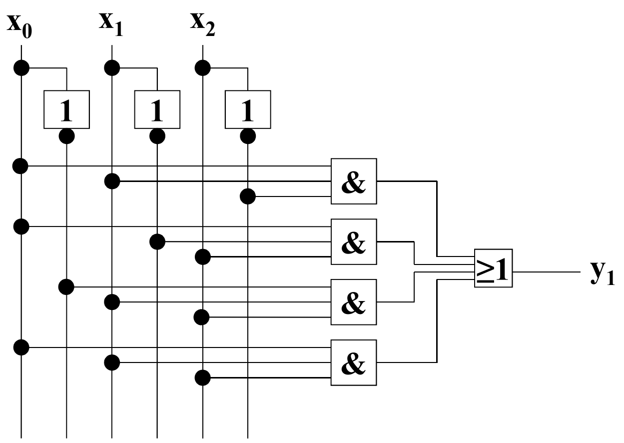
Minterm	x_2	x_1	x_0	y_1	Maxterm
	0	0	0	0	$x_0+x_1+x_2$
	0	0	1	0	$\overline{x}_0+x_1+x_2$
	0	1	0	0	$x_0+\overline{x}_1+x_2$
$x_0 x_1 \overline{x}_2$	0	1	1	1	
	1	0	0	0	$x_0+x_1+\overline{x}_2$
$x_0 \overline{x}_1 x_2$	1	0	1	1	
$\overline{x}_0 x_1 x_2$	1	1	0	1	
$x_0 x_1 x_2$	1	1	1	1	

Eingabevariablen =>y_1=1 generieren Minterme.
KDNF: $x_0x_1\overline{x}_2+x_0\overline{x}_1x_2+\overline{x}_0x_1x_2+x_0x_1x_2$

Eingabevariablen invertiert => y_1=0 generieren Maxterme.
KKNF: $(x_0+x_1+x_2)\cdot(\overline{x}_0+x_1+x_2)\cdot(x_0+\overline{x}_1+x_2)\cdot(x_0+x_1+\overline{x}_2)$

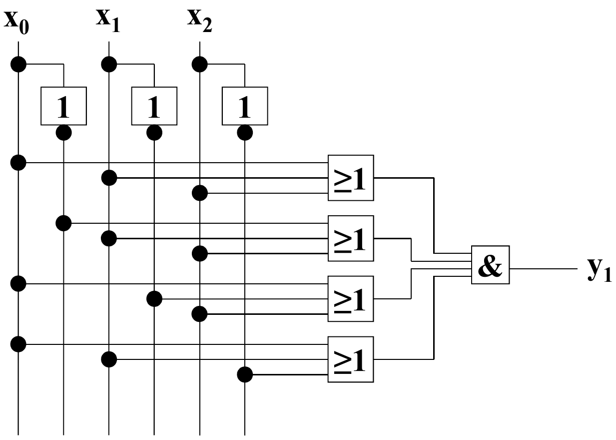
47

Schaltbildes von y_1 in KDNF:



48

Schaltbildes von y_1 in KKNF:



49

Minimalformen

Definition:

Eine in disjunktiver Normalform angegebene Boole‘sche Funktion ist in Disjunktiver Minimalform (DMF), wenn

- jede äquivalente Darstellung derselben Funktion in DNF mindestens genausoviele Produktterme besitzt,

und wenn

- für jede äquivalente Darstellung in DNF mit genausovielen Produkttermen die Anzahl der Eingänge in diese Produktterme mindestens genauso groß ist wie die Anzahl bei dieser Darstellung.

50

Minimalformen

Definition:

Eine in konjunktiver Normalform angegebene Boole‘sche Funktion ist in Konjunktiver Minimalform (KMF), wenn

- jede äquivalente Darstellung derselben Funktion in KNF mindestens genausoviele Summenterme besitzt,

und wenn

- für jede äquivalente Darstellung in KNF mit genausovielen Summentermen die Anzahl der Eingänge in diese Summenterme mindestens genauso groß ist wie die Anzahl bei dieser Darstellung.

51

KV-Diagramm zur graphischen Minimierung:

- Rechteckiges Schema
- bei n Eingabevariablen 2^n innere Felder
- Ränder so beschriftet, dass jede Variable genau die Hälfte des Diagramms abdeckt
- Jede Variable deckt genau den halben Bereich jeder anderen Variablen ab
- Jeder Minterm ist eindeutig durch ein inneres Feld repräsentiert.

52

Beispiele:

	b	
a	ab	$a\bar{b}$
	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

	b			
a	$ab\bar{c}$	abc	$a\bar{b}c$	$a\bar{b}\bar{c}$
	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
		c		

	b				
a	$ab\bar{c}\bar{d}$	$abc\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	
	$ab\bar{c}d$	$abcd$	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}\bar{c}d$	d
	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	
	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	
		c			

53

Belegung im KV-Diagramm über Grey-Code (Karnaugh-Schema)

Grey-Code: Nachbarzellen unterscheidet sich immer nur in einer Stelle.
Binärbelegung 2 Bit : x_1x_0 = (00,01,11,10), n=(0,1,3,2)

n	x_1	x_0
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

Belegung von 2 Eingangsvariablen

x_1 \ x_0	0	1
0	00	01
1	10	11

Greycode Matrix binär

x_1 \ x_0	0	1
0	0	1
1	2	3

Greycode matrix n

54

Belegung im KV-Diagramm über Grey-Code

3 Bit Grey-Code:
$x_2x_1x_0$ = (000,001,011,010,110,111,101,100), n=(0,1,3,2,6,7,5,4)

n	x_2	x_1	x_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Belegung von 3 Eingangsvariablen

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

Greycode Matrix binär

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Greycode Matrix n

x_2x_1 \ x_0	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

Alternative:
Greycode Matrix n

55

Belegung im KV-Diagramm über 4-Bit Grey-Code

n	x_3	x_2	x_1	x_0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

4 Eingangsvariablen

Greycode Matrix binär

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

Greycode Matrix n

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

56

Beispiel: Minimierung durch Zusammenfassen

n	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

4 Eingangsvariablen,
Belegung f beliebig

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 1	2: 1
01	4: 1	5: 0	7: 0	6: 1
11	12: 1	13: 0	15: 0	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 0

$(\bar{x}_2\bar{x}_3)$

$(\bar{x}_0 x_2)$

$$DMF: f = (\bar{x}_0 x_2) + (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$$

57

Belegung im KV-Diagramm über Variablen (Veitch-Schema)

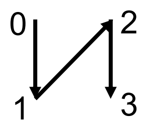
n	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

4 Eingangsvariablen
(f beliebig gewählt)

- Variablenschema für n mit Werten von f eingetragen

x_1 (Spalten 3–4), x_2 (Zeilen 2–3), x_0 (Zeilen 3–4), x_3 (Spalten 2–3)

	0: 1	8: 0	10: 0	2: 1
	4: 1	12: 1	14: 1	6: 1
	5: 0	13: 0	15: 0	7: 0
	1: 1	9: 0	11: 0	3: 1



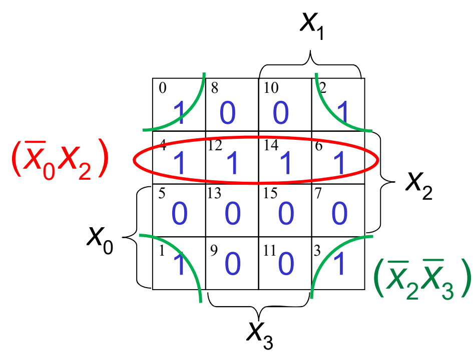
Schema

58

Belegung im KV-Diagramm

- Variablenschema für n
- Minterme (1) von f

n	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0



$$DMF: f = (\bar{x}_0 x_2) + (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$$

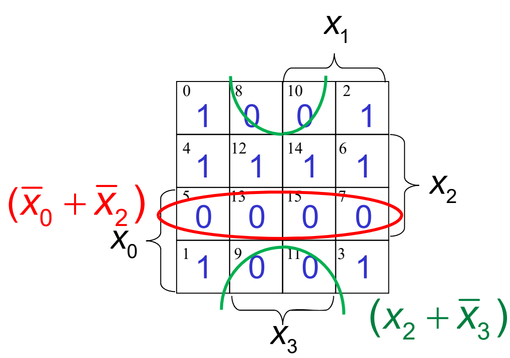
4 Eingangsvariablen
(f beliebig gewählt)

59

Belegung im KV-Diagramm

- Variablenschema für n
- Maxterme (0) von f

n	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0



$$KMF: f = (\bar{x}_0 + \bar{x}_2) \cdot (x_2 + \bar{x}_3)$$

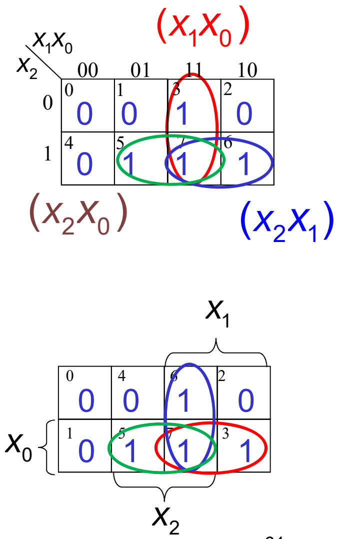
4 Eingangsvariablen
(f beliebig gewählt)

60

DMF vom Carry des Volladdierers

$KDNF: x_0 x_1 \bar{x}_2 + x_0 \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2$

x_2	x_1	x_0	y_1	Minterm
0	0	0	0	$\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2$
0	0	1	0	$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2$
0	1	0	0	$\bar{x}_0 x_1\bar{x}_2$
0	1	1	1	$x_0 x_1\bar{x}_2$
1	0	0	0	$\bar{x}_0\bar{x}_1 x_2$
1	0	1	1	$x_0\bar{x}_1 x_2$
1	1	0	1	$\bar{x}_0 x_1 x_2$
1	1	1	1	$x_0 x_1 x_2$



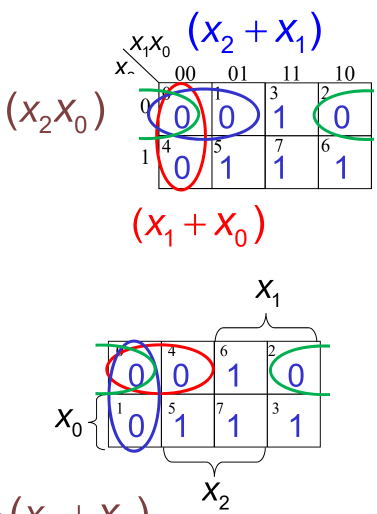
$DMF: f = (x_1x_0) + (x_2x_0) + (x_2x_1)$

61

KMF vom Carry des Volladdierers

$KKNF: (x_0 + x_1 + x_2)\cdot(\bar{x}_0 + x_1 + x_2)\cdot(x_0 + \bar{x}_1 + x_2)\cdot(x_0 + x_1 + \bar{x}_2)$

x_2	x_1	x_0	y_1	Maxterm
0	0	0	0	$x_0+x_1+x_2$
0	0	1	0	$\bar{x}_0+x_1+x_2$
0	1	0	0	$x_0+\bar{x}_1+x_2$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$x_0+x_1+\bar{x}_2$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	



$KMF: f = (x_1 + x_0)\cdot(x_2 + x_1)\cdot(x_2 + x_0)$

62

Beispiel Warnleuchte W im Auto: Leuchtet wann ?

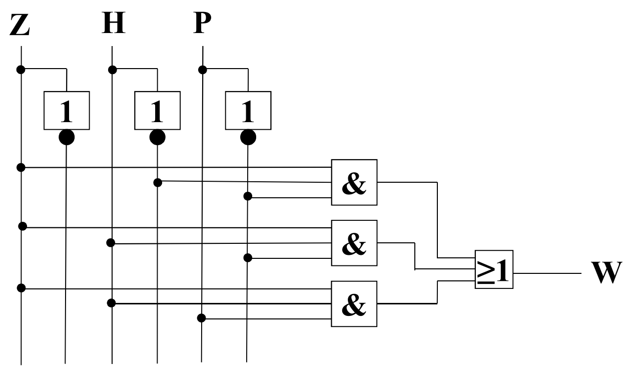
Zündung: Z=0: Zündung aus, Z=1: Zündung an
Kühlwasser: H=0: Temperatur OK, H=1: Temperatur>95°
Wasser-Pegel: P=0: kein Wasser, P=1: ausreichend Wasser

Z	H	P	W	Minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$Z\overline{H}\,\overline{P}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$ZH\overline{P}$
1	1	1	1	ZHP

63

Warnleuchten-Funktion in KDNF:

$$W = Z\overline{H}\,\overline{P} + ZH\overline{P} + ZHP$$



Ist die KDNF minimal bzgl. der Anzahl der Gatter?

64

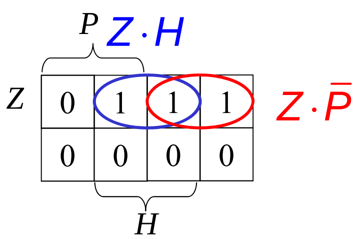
Minimierung der KDNF der Warnleuchte

$$
\begin{aligned}
W &= Z\overline{H}\,\overline{P} + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= Z\overline{H}\,\overline{P} + ZH\overline{P} + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= Z\overline{P}\,\overline{H} + Z\overline{P}H + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= (Z\overline{P}\cdot\overline{H} + Z\overline{P}\cdot H) + (ZH\cdot\overline{P} + ZH\cdot P) \\
&= Z\overline{P}\cdot(\overline{H} + H) + ZH\cdot(\overline{P} + P) \\
&= Z\overline{P}\cdot 1 + ZH\cdot 1 \\
&= Z\overline{P} + ZH
\end{aligned}
$$

65

Beispiel: Warnleuchte (DMF)

Z	H	P	W
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

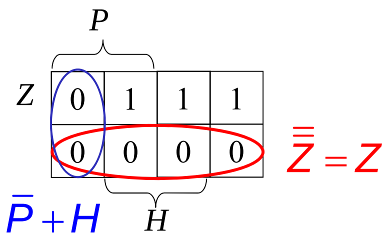


$$W = Z\overline{P} + ZH$$

66

Beispiel: Warnleuchte (KMF)

Z	H	P	W
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



$$W = Z(\bar{P} + H)$$

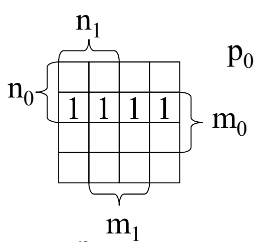
67

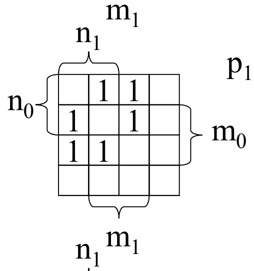
Beispiel 2-Bit Multiplizierer:

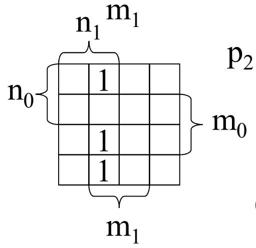
n * m = p

2x2 Eingänge (0-3), 4 Ausgänge (0-9)

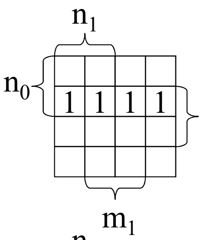
n_1	n_0	m_1	m_0	p_3	p_2	p_1	p_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1





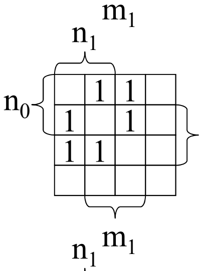


68



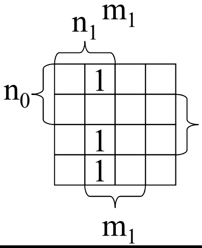
p_0

$$p_0 = n_0 \cdot m_0$$



p_1

$$p_1 = n_0 \cdot \overline{m_0} \cdot m_1 + \overline{n_0} \cdot n_1 \cdot m_0 + n_1 \cdot m_0 \cdot \overline{m_1} + n_0 \cdot \overline{n_1} \cdot m_1$$



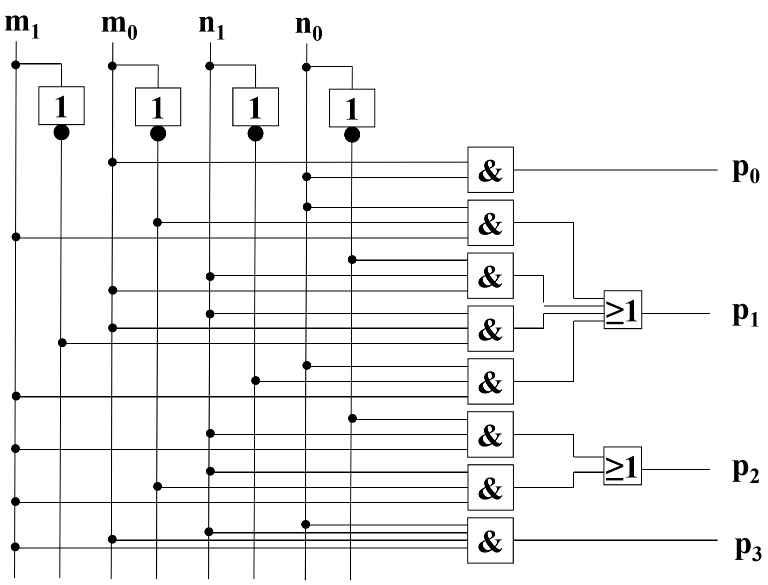
p_2

$$p_2 = \overline{n_0} \cdot n_1 \cdot m_1 + n_1 \cdot \overline{m_0} \cdot m_1$$

$$p_3 = n_0 \cdot n_1 \cdot m_0 \cdot m_1$$

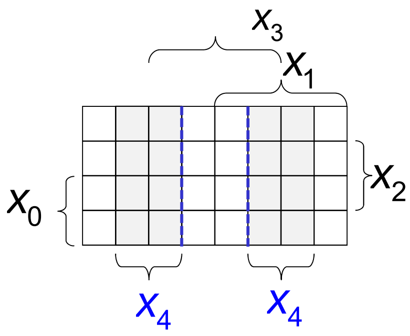
69

Schaltnetz eines 2-Bit-Multiplizierers



70

KV-Diagramme mit 5 Variablen



Über blaue Kante zusammenfassen

Spiegelachse

x_4x_3 \ $x_2x_1x_0$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	00000	00001	00011	00010	00110	00111	00101	00100
01	01000	01001	01011	01010	01110	01111	01101	01100
11	11000	11001	11011	11010	11110	11111	11101	11100
10	10000	10001	10011	10010	10110	10111	10101	10100

Spiegelsymmetrisches Zusammenfassen

Grey-Code für 5 Variablen: zerlege in 3 und 2 Variablen
$x_2x_1x_0$ = (000,001,011,010,110,111,101,100), n=(0,1,3,2,6,7,5,4)
x_4x_3 = (00,01,11,10), n= 0,1,3,2)

KV-Diagramme mit 6 Variablen